

PETRU ROTARU

DETERMINANȚI MICȘTI

Probleme de matematica pentru liceu

Ediția a II-a

Editura TAIDA

- IAȘI, 2020 -

$$1 + z_k^2 = 1 + \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} = 2 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{n} +$$

$$+ 2i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} +$$

$$+ i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right] \text{ și atunci: produsul din stânga, pentru (1), devine:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + z_k^2) = 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \cos \frac{5\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} \cdot$$

$$\cdot \left[\cos \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)\pi}{n} \right] =$$

$$= 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} [\cos n\pi + i \sin n\pi], \text{ adică am găsit:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + z_k^2) = 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} \cdot \cos n\pi \quad (2).$$

Acum:

$$\prod_{h=1}^2 \left((x_h)^n + 1 \right) = \left[(i)^n + 1 \right] \left[(-i)^n + 1 \right] = 1^n + i^n + (-i)^n + 1 = \begin{cases} 4, & n = 4\ell \\ 2, & n = 4\ell \pm 1 \\ 0, & n = 4\ell = 2 \end{cases}$$

$\ell \in \mathbb{N}^*$. Venind cu ultimul rezultat și cu (2) în (1), obținem identitatea dorită.

P.303. Polinomul $f = X^2 + X + 1$ are rădăcinile $x_1 = \varepsilon$ și $x_2 = \bar{\varepsilon}$ cu $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1 x_2 = 1$ și $x_1^3 = x_2^3 = 1$, iar polinomul $g = Z^n - 1$ are

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}, \text{ atunci din lemă:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} f(z_k) = (-1)^{2n} \prod_{h=1}^2 g(x_h), \text{ adică } \prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) = \prod_{h=1}^2 \left[(x_h)^n - 1 \right] \quad (1).$$

Pentru (1) calculăm, pe rând, cele două produse:

$$1 + z_k + z_k^2 = 1 + \cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = 2 \cos^2 \frac{2k\pi}{n} +$$

$$+ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2k\pi}{n} \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) +$$

$$+i \sin \frac{2k\pi}{n} \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) =$$

$$= \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) z_k \text{ și atunci produsul din stânga, pentru (1), devine:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) \cdot z_k = (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ adică}$$

$$\text{am găsit: } (-1)^{n+1} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right) \left(1 + 2 \cos \frac{4\pi}{n} \right) \cdots \left(1 + 2 \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) \quad (2).$$

$$\text{Acum: } \prod_{h=1}^2 ((x_h)^n - 1) = (\varepsilon^n - 1) \left((\bar{\varepsilon})^n - 1 \right) = (\varepsilon \bar{\varepsilon})^n - (\varepsilon)^n - (\bar{\varepsilon})^n + 1 =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 3\ell \\ 3, & n = 3\ell \pm 1 \end{cases}, \ell \in \mathbb{N}^* \text{ și, în final, cu (2) și (3) în (1), obținem identitatea}$$

dorită.



Editura Galaxia
 Succesul tău începe cu noi!

Cuprins

1. Argument	3
2. Introducere.....	4
3. Motivația	5
4. Determinanți micști	8
5. Polinomul caracteristic al unei matrice în raport cu altă matrice	41
6. Matrice K-diferite	56
7. Probleme	68
8. Soluții	111
9. Bibliografie	223



Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!