

**PETRE NĂCHILĂ**

**GEOMETRIE  
PENTRU TOȚI**

**CLASA a VII-a**

**Editura NOMINATRIX**

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare.

Referent științific: Magdalena Claudia Uleia

Editor: Alexandru Creangă

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442; 0348.439.417

<b>Reprezentant zonal</b>	<b>Zona</b>
<b>Dobrin Marius</b> (0741.488.918)	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
<b>Vesa Adrian</b> (0748.111.247)	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
<b>Cepăreanu Alin</b> (0751.207.922)	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
<b>Săsărman Traian</b> (0757.020.443)	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
<b>Lungu Ion</b> (0746.200.413)	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava;
<b>Alexe Cornel</b> (0769.221.685)	Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
<b>Lungu Ionuț</b> (0744.429.512)	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
<b>Anton Victor</b> (0755.107.291, 0769.221.680)	București

Punct de lucru: comuna Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș

Tel.: 0348.439.417/ Fax: 0348.439.416

e-mail: comenzi.nomina@gmail.com

**www.edituranomina.ro**

**www.librarianomina.ro**

#### **Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**NĂCHILĂ, PETRE**

**Geometrie pentru toți : clasa a VII-a / Petre Năchilă. - Pitești : Nomina, 2020**

ISBN 978-606-535-853-9

51

Copyright © Editura Nomina, 2020

Toate drepturile aparțin Editurii Nomina.

# CUPRINS

---

## Capitolul 1. PATRULATERE

1.1. Patrulaterul convex .....	5
1.2. Paralelogramul .....	9
1.3. Linia mijlocie în triunghi. Centrul de greutate al triunghiului .....	14
1.4. Dreptunghiul .....	19
1.5. Rombul .....	24
1.6. Pătratul .....	28
1.7. Trapezul .....	32
1.8. Linia mijlocie în trapez .....	36
1.9. Centrul de simetrie și axa de simetrie pentru triunghi și patrulater .....	40
1.10. Aria triunghiului. Ariile patrulaterelor .....	45
1.11. Probleme pentru concursurile școlare .....	49

## Capitolul 2. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

2.1. Segmente proporționale .....	54
2.2. Teorema lui Thales. Teorema bisectoarei .....	57
2.3. Teorema fundamentală a asemănării .....	64
2.4. Criterii de asemănare a triunghiurilor .....	70
2.5. Probleme pentru concursuri școlare .....	76

## Capitolul 3. RELAȚII METRICE

3.1. Proiecții ortogonale. Teorema înălțimii .....	81
3.2. Teorema catetei .....	85
3.3. Teorema lui Pitagora .....	89
3.4. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic .....	95
3.5. Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	99
3.6. Ariile poligoanelor .....	105
3.7. Probleme pentru concursurile școlare .....	109

## Capitolul 4. CERCUL

4.1. Elementele cercului. Coardă, arc, unghi la centru .....	113
4.2. Unghi înscris în cerc. Triunghi înscris în cerc .....	117
4.3. Tangenta la cerc. Poligoane circumscrise unui cerc .....	124
4.4. Patrulater inscriptibil .....	131

4.5. Poligoane regulate .....	136
4.6. Lungimea și aria cercului .....	142
4.7. Probleme pentru concursurile școlare.....	145
<b>Capitolul 5. EXTINDERI</b>	
5.1. Metode de rezolvare a problemelor de geometrie .....	149
5.2. Relații metrice în triunghiul oarecare .....	153
5.3. Cercul lui Euler.....	156
5.4. Relații metrice în cerc.....	159
5.5. Aplicațiile trigonometriei în geometrie .....	161
5.6. Probleme de coliniaritate .....	167
5.7. Probleme de concurență.....	170
<b>SOLUȚII</b> .....	174

# Capitolul 1

## PATRULATERE

---

### 1.1. Patrulaterul convex

**DEFINIȚIA 1.** Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

**DEFINIȚIA 2.** Un patrulater se numește **convex** dacă, pentru oricare două puncte din interiorul său, segmentul ce le unește este inclus în interiorul patrulaterului (sau oricare dreaptă suport a laturilor sale nu secționează interiorul patrulaterului). În caz contrar, patrulaterul se numește **concav**.

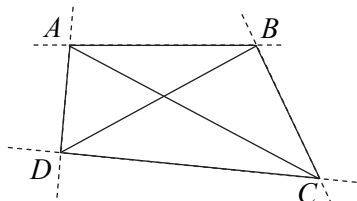


Fig. 1. Patrulater convex

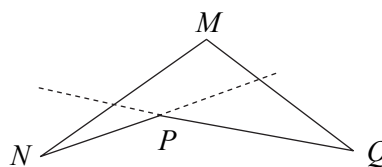


Fig. 2. Patrulater concav

**TEOREMĂ.** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de  $360^\circ$ .

**DEFINIȚIA 3.** Elementele unui patrulater convex sunt **vârfurile**, **laturile**, **unghiurile** și **diagonalele** ( $(AC)$  și  $(BD)$  în figura 1).

Vârfurile, laturile, unghiurile pot fi consecutive sau opuse.

**DEFINIȚIA 4.** Diagonala este segmentul determinat (în patrulater) de vârfurile a două unghiuri opuse.

**Observații. 1.** Un patrulater convex îl putem considera constituit din două triunghiuri care au interioarele disjuncte și o latură comună (o diagonală a patrulaterului).

2. Aria unui patrulater convex este suma ariilor a doua triunghiuri care îl compun.

### Probleme rezolvate

1. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că sunt invers proporționale cu 2, 3, 4, 6.

**Soluție.**  $\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{D}{4} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ \Rightarrow A = 144^\circ, B = 96^\circ,$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ \Rightarrow A = 144^\circ, B = 96^\circ,$$

$$C = 72^\circ, D = 48^\circ.$$

2. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă primele trei sunt date

de numere pare consecutive, iar a patra este media aritmetică a primelor trei.

**Soluție.** Notăm primele trei măsuri cu  $2n - 2$ ,  $2n$ ,  $2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , iar a patra măsură este  $2n$ . Din  $8n = 360$  rezultă  $n = 45$ . Măsurile sunt de  $88^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $92^\circ$ ,  $90^\circ$ .

3. Fie patrulaterul  $ABCD$ , cu  $AB = BC$ ,  $CD = DA$ . Demonstrați că:

- $[BD]$  este bisectoarea unghiului  $ABC$ ;
- $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ ;
- $AC \perp BD$ .

**Soluție.** a)  $AB = BC$ ,  $AD = CD \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$ ,  
 $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle DAC$  (figura 3)  $\Rightarrow BD$  mediatoarea lui  $[AC] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle ABD$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA +$   
 $+ \sphericalangle DCA = \sphericalangle C$ ,  $AC \perp BD$ .

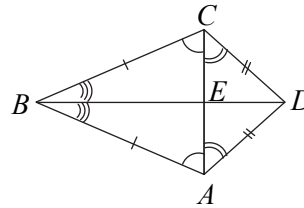


Fig. 3

## Probleme propuse

\*

1. Fie patrulaterul convex  $ABCD$ . Măsurile unghiurilor triunghiului  $ABD$ , în ordinea  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , sunt direct proporționale cu numerele 6, 4, 2, iar măsurile unghiurilor triunghiului  $BCD$  sunt invers proporționale, în ordinea  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , cu  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ . Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

2. Câte patrulatere convexe se pot forma cu cinci puncte distincte?

3. Care este numărul minim (maxim) de:

- unghiuri ascuțite ale unui patrulater convex;
- unghiuri obtuze ale unui patrulater convex.

4. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu:

- 2, 4, 6, 8;
- 3, 5, 6, 4.

5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu:

- 3, 4, 6, 12;
- 2, 4, 6, 8.

6. Suma măsurilor a trei unghiuri ale unui patrulater convex este  $240^\circ$ . Determinați măsurile unghiurilor dacă trei dintre acestea sunt congruente.

7. Suma măsurilor a două unghiuri ale unui patrulater convex este  $168^\circ$ , iar trei unghiuri sunt congruente. Aflați măsurile unghiurilor.

8. Fie  $ABCD$  un patrulater convex cu  $AB \cap CD = \{O\}$ .

a) Completați tabelul:

	$\sphericalangle BAD$	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle BCD$	$\sphericalangle CDA$	$\sphericalangle DAC$	$\sphericalangle BAC$	$\sphericalangle BCA$	$\sphericalangle ACD$	$\sphericalangle BDC$	$\sphericalangle BDA$	$\sphericalangle AOB$
i)	$120^\circ$		$95^\circ$		$75^\circ$		$50^\circ$		$20^\circ$	$40^\circ$	
ii)		$105^\circ$	$75^\circ$			$60^\circ$		$30^\circ$			$90^\circ$
iii)						$90^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$		$120^\circ$

b) În cazul i), demonstrați că există în figură două triunghiuri isoscele.

c) În cazul ii), demonstrați că: I.  $OA = OB$ ; II.  $OC = OD$ ; III.  $AD = 2 \cdot AO$ ; IV.  $BC = 2 \cdot BO$ ; V.  $AB \parallel CD$ ; VI.  $AC = BD$ .

d) În cazul iii), demonstrați că: I.  $OA = OB$ ; II.  $OC = OD$ ; III.  $AC = BD$ ; IV.  $AC = 3 \cdot OA$ ; V.  $AB \parallel CD$ ; VI.  $AD = BC$ .

\*\*

9. Demonstrați că, în orice patrulater convex, suma lungimilor a trei laturi este mai mare decât lungimea celei de-a patra laturi.

10. Într-un patrulater convex  $ABCD$  avem  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $OA = OB$ ,  $OC = OD$ . Demonstrați că:

a)  $AB \parallel CD$ ;

b)  $AD = BC$ .

11. Într-un patrulater convex  $ABCD$  avem  $OA = OC$ ,  $OB = OD$ , unde  $AC \cap BD = \{O\}$ . Demonstrați că:

a)  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ;

b)  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ .

12. Puteți împărți un patrulater oarecare în trei „regiuni” folosind o singură dreaptă?

13. Determinați măsura unui unghi al unui patrulater convex, dacă măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu numerele  $2n - 4$ ,  $2n - 2$ ,  $2n$ ,  $2n + 6$ , unde  $n > 2$ .

\*\*\*

14. În patrulaterul  $ABCD$  se știe că  $m(\sphericalangle A) = 50^\circ$ ,  $m(\sphericalangle B) = 40^\circ$ ,  $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ . Determinați  $m(\sphericalangle ADC)$  și unghiul făcut de dreptele  $AB$  și  $DC$ .

15. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  cu perimetrul de 39 cm. Se știe că  $P_{ABC} = 23$  cm,  $P_{ACD} = 34$  cm. Determinați lungimea diagonalei  $AC$ .

16. Fie patrulaterul convex  $ABCD$ . Știind că  $P_{ABD} = P_{ACD}$  și  $P_{BCD} = P_{ABC}$ , demonstrați că  $AC = BD$ ,  $AB = DC$ ,  $AD = BC$ .

17. În patrulaterul convex  $ABCD$  se știe că  $AB = BC$ ,  $AD = CD$ ,  $m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ$ ,  $m(\sphericalangle DAC) = 45^\circ$ .

a) Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

- b) Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ . Determinați  $m(\sphericalangle AOB)$ .
- c) Demonstrați că  $OD = OA = OC = \frac{1}{2}AB$ .
18. Fie  $ABCD$  patrulater convex, iar  $M$  și  $N$  mijloacele diagonalelor  $(AC)$  și  $(BD)$ . Demonstrați că  $AB + BC + CD + DA > 4MN$ .
19. Fie  $ABCD$  patrulater convex. Demonstrați că:  

$$2(AC^2 + BD^2) < (AC + BD)(AB + BC + CD + DA).$$
20. Demonstrați că suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu  $n$  laturi este  $S_n = 180^\circ \cdot (n - 2)$  (unde  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ).
21. Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex formate prin prelungirea laturilor în același sens este de  $360^\circ$ .
22. Demonstrați că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează între ele un unghi având măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte două unghiuri.
23. Demonstrați că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri opuse formează între ele un unghi suplementar cu semidiferența celorlalte două unghiuri.
24. Fie  $M$  un punct interior patrulaterului convex  $ABCD$ . Demonstrați că:  

$$AM + MD < AB + BC + CD.$$
25. Fie  $M$  un punct interior patrulaterului convex  $ABCD$ . Demonstrați că:  

$$AB + BC + CD + DA < 2(AM + MB + MC + MD) < 3(AB + BC + CD + DA).$$
26. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  cu  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ . Bisectoarea unghiului  $B$  intersectează  $DC$  și  $AD$  în  $E$  și  $F$ . Demonstrați că  $m(\sphericalangle DEF) = 180^\circ - A - \frac{B}{2}$ .
27. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  cu  $(AD \cap BC = \{M\})$ , iar  $(AB \cap DC = \{N\})$ . Demonstrați că  $m(\sphericalangle BMA) - m(\sphericalangle AND) = m(\sphericalangle ADC) - m(\sphericalangle ABC)$ . (Figura  $MCDNAB$  se numește **patrulater complet**.)
28. Demonstrați că, dacă unul din unghiurile unui patrulater convex are măsura egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri, atunci acest unghi este drept.
29. Demonstrați că, dacă un unghi al unui poligon convex cu  $n$  laturi are măsura egală



cu  $\frac{1}{2n-5}$  din suma măsurilor celorlalte unghiuri, atunci acest unghi este drept.

30. Demonstrați că în patrulaterul convex  $ABCD$  avem:

- a)  $AC + BD > AB + CD$ ;                      b)  $2 \cdot (AC + BD) > AB + BC + CD + DA$ .

31. Demonstrați că într-un patrulater convex  $ABCD$  cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $(AB)$  și  $(CD)$  avem  $2MN < AD + BC$ .

32. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  cu  $A > 90^\circ$ ,  $C > 90^\circ$ . Arătați că  $AC < BD$ .

33. Dacă în patrulaterul convex  $ABCD$  avem  $AB + BD < AC + CD$ , atunci  $AB < AC$ .

34. În patrulaterul convex  $ABCD$  avem  $AC = AD$ . Demonstrați că  $BC < BD$ .

35. Fie  $2p$  perimetrul patrulaterului convex  $ABCD$ . Demonstrați că  $p < AC + BD < 2p$ .

36. Demonstrați că în orice poligon convex nu putem avea mai mult de trei unghiuri ascuțite.

## 1.2. Paralelogramul

**DEFINIȚIE.** Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

**TEOREMA 1.** Într-un paralelogram sunt adevărate afirmațiile:

- 1) laturile opuse sunt congruente două câte două;
- 2) oricare două unghiuri opuse sunt congruente;
- 3) oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
- 4) diagonalele se taie în segmente congruente (se „înjumătățesc”).

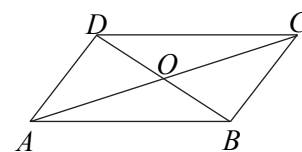


Fig. 4

**TEOREMA 2.** Un patrulater convex  $ABCD$  este paralelogram dacă îndeplinește una dintre condițiile:

- (1)  $AB = CD$ ;  $AD = BC$  (laturile opuse sunt congruente);
- (2)  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ ,  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$  (oricare două unghiuri opuse sunt congruente);
- (3) oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
- (4) diagonalele se înjumătățesc;
- (5)  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$  (definiție);
- (6) are două laturi opuse paralele și congruente.

**Observații. 1.** Înălțimea unui paralelogram este distanța dintre două laturi opuse (în figura 5,  $(MN)$  și  $(EF)$ ).

2. Punctul  $O$  de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este centrul său de greutate.

3. Perimetrul este  $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$ .

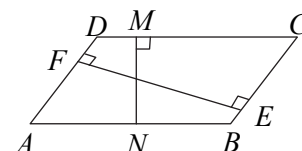


Fig. 5

## Probleme rezolvate

1. Demonstrați că orice dreaptă dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor este împărțită de acest punct și de două laturi opuse în „părți” egale.

**Soluție.** Luând figura 6, trebuie demonstrat că  $AN = CP$  ( $\Leftrightarrow BN = DP$ ),  $OP = ON$ . Avem  $\triangle AON \equiv \triangle COP$  ( $AO = CO$ ,  $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle COP$ ,  $\sphericalangle NAO \equiv \sphericalangle PCO$ ) și deci  $OP = ON$ ,  $AN = PC$ .

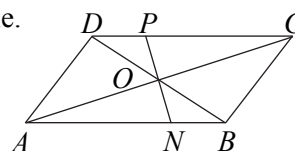


Fig. 6

2. Fie paralelogramul  $MNPR$  înscris în paralelogramul  $ABCD$  (vârfurile unuia se află câte unul pe o latură a celuilalt, figura 7). Demonstrați că cele două paralelograme au același centru de greutate.

**Soluție.** Fie  $O$  mijlocul diagonalelor ( $MP$ ) și ( $NR$ ). Avem  $\triangle AMR \equiv \triangle CPN$  ( $MR = PN$ ,  $\sphericalangle AMR \equiv \sphericalangle CPN$ ,  $\sphericalangle ARM \equiv \sphericalangle CNP$ , având laturile paralele). Avem deci  $AM = CP$ . Avem  $\triangle AOM \equiv \triangle COP$  ( $AM = CP$ ,  $OM = OP$ ,  $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle CPO$ ) și deci  $OA = OC$ . Analog se arată că  $OB = OD$  și deci  $ABCD$  este paralelogram.

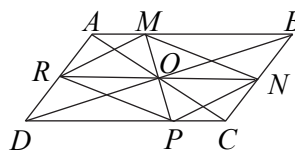


Fig. 7

3. Fie  $N$  și  $P$  mijloacele laturilor ( $AB$ ) și ( $CD$ ) ale paralelogramului  $ABCD$ . Fie  $BD \cap AP = \{E\}$ ,  $CN \cap BD = \{F\}$ . Demonstrați că  $DE = EF = BF$ .

**Soluție.** Fie  $AC \cap BD = \{O\}$  (figura 8). Cum ( $AP$ ) și ( $DO$ ) sunt mediane (ce se taie în  $E$ ) ale triunghiului  $DAC$ , atunci  $E$  este centrul de greutate și deci  $DE = \frac{2}{3}DO =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{BD}{3}. \text{ Analog avem } BF = \frac{BD}{3} \text{ și obținem } EF = \frac{BD}{3}.$$

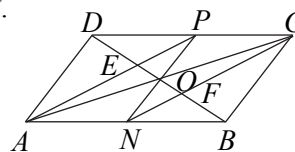


Fig. 8

## Probleme propuse

\*

1. Determinați măsurile unghiurilor paralelogramului  $ABCD$  dacă:

- a)  $A = 2B$ ;                      b)  $C + 2D = 315^\circ$ ;                      c)  $\frac{2}{3}B - A = 60^\circ$ .

2. Fie  $ABCD$  paralelogram cu  $AC \cap BD = \{O\}$ . Dacă:

- a)  $AD = 12$  cm,  $AC = 16$  cm,  $P_{BOC} = 26$  cm, aflați  $BD$ ;  
b)  $P_{ABO} = P_{ADO} = 24$  cm,  $OA + OB = 14$  cm, aflați  $P_{ABCD}$ .

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) există paralelograme cu toate unghiurile drepte;  
b) există paralelograme cu toate laturile congruente;

- c) există paralelograme cu diagonalele perpendiculare;  
 d) există paralelograme cu diagonalele congruente.

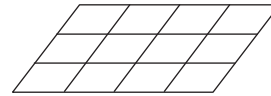


Fig. 9

4. Câte paralelograme sunt în figura 9?

5. Calculați perimetrul paralelogramului  $ABCD$ , știind că  $AD = 5$  cm,  $BD \perp AD$ ,  $m(\sphericalangle BCD) = 60^\circ$ .

6. Fie paralelogramele  $ABCD$  și  $CDFE$  având centrele  $N$ , respectiv  $P$ . Calculați lungimea segmentului  $(AF)$ , dacă  $NP = 5$  cm.

7. Fie triunghiul  $ABC$  echilateral și punctul  $E \in (AC)$ , iar triunghiul  $ADE$  echilateral în exteriorul lui  $ABC$ . Fie  $DE \cap BC = \{F\}$ . Demonstrați că patrulaterul  $ABFD$  este paralelogram.

8. Fie punctele  $E \in (AB)$ ,  $F \in (CD)$ , astfel încât  $AE = CF$ ,  $AF \cap DE = \{M\}$ ,  $CE \cap BF = \{N\}$ . Știind că  $ABCD$  este paralelogram, demonstrați că patrulateralele  $AECF$ ,  $MENF$ ,  $DFBE$  sunt paralelograme.

9. Fie triunghiul  $ABC$  isoscel ( $AB = AC$ ) și  $D = \text{sim}_C A$ ,  $E = \text{sim}_{BC} A$ . Demonstrați că  $BCDE$  este paralelogram.

10. Fie paralelogramele  $ABCD$  și  $ABFE$ . Demonstrați că  $CDEF$  este paralelogram.

11. Fie paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AB = 2BC$ ,  $m(\sphericalangle A) = 2m(\sphericalangle D)$ . Calculați  $m(\sphericalangle ACD)$ .

\*\*

12. Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctele  $M \in (AB)$ ,  $P \in (CD)$ ,  $N \in [BC]$  și  $R \in [AD]$ , astfel încât  $AM = CP$ ,  $BN = DR$ . Demonstrați că dreptele  $AC$ ,  $MP$  și  $NR$  sunt concurente.

13. Fie paralelogramul  $ABCD$  și  $BM \perp AC$ ,  $DN \perp AC$ ,  $M, N \in (AC)$ . Demonstrați că mijlocul lui  $MN$  se află pe  $(BD)$ .

14. Bisectoarele unghiurilor  $A$  și  $C$  ale paralelogramului  $ABCD$  intersectează  $BD$  în  $E$  și  $F$ . Demonstrați că  $AECF$  este paralelogram.

15. Fie  $M$  mijlocul laturii  $BC$  în paralelogramul  $ABCD$ . Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $AM \cap CD = \{E\}$ . Demonstrați că  $DE = 4 \cdot OM$ .

16. Demonstrați că patrulaterul convex în care două laturi sunt paralele, iar una dintre diagonale trece prin mijlocul celelalte este paralelogram.

17. Paralelogramele  $ABCD$ ,  $CDEF$ ,  $BCFG$  au interioarele disjuncte. Demonstrați că  $\triangle AEG \equiv \triangle FBD$ .

18. Fie paralelogramul  $ABCD$  și  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp BC$ ,  $BG \perp CD$ ,  $BH \perp DA$ ,  $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$ ,  $G \in (CD)$ ,  $H \in (AD)$ ,  $BG \cap DF = \{N\}$ ,  $DE \cap BH = \{P\}$ . Demonstrați că:

- patrulaterul  $EFGH$  este paralelogram;
- dreptele  $EG$ ,  $FH$ ,  $NP$  și  $AC$  sunt concurente.

19. În exteriorul paralelogramului  $ABCD$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $BCE$  și  $CDF$ . Demonstrați că triunghiul  $AEF$  este echilateral.

20. În exteriorul paralelogramului  $ABCD$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $ABM$ ,  $BCN$ ,  $CDP$  și  $ADR$ . Demonstrați că  $MNPR$  este paralelogram.

\*\*\*

21. Fie  $M$  mijlocul ipotenuzei  $(BC)$  în triunghiul  $ABC$ ,  $D \in (BC)$ ,  $N$  mijlocul lui  $(AD)$ , iar  $E = \text{sim}_D M$ . Dreapta  $DE$  taie  $AC$  și  $AB$  în punctele  $P$  și  $R$ . Demonstrați că  $PE = RE$ .

22. Fie  $I$  mijlocul înălțimii  $(AF)$  în triunghiul  $ABC$ . Dreptele  $BI$  și  $CI$  întâlnesc  $AC$  și  $AB$  în  $M$ , respectiv  $N$ . Paralelele duse prin  $F$  la laturile  $AC$  și  $AB$  taie  $BM$  și  $CN$  în  $P$  și  $R$ . Demonstrați că  $MNPR$  este paralelogram.

23. Fie  $ABCD$  paralelogram. Prin  $E \in (AD)$  se duce  $EF \parallel AB$ ,  $F \in (BC)$ , iar  $AF \cap BD = \{G\}$ . Prelungim  $GF$  cu  $FH = AG$  și  $GD$  cu  $DI = BG$ . Se construiește paralelogramul  $IGHK$ . Demonstrați că  $GK \parallel BC$  și  $GK = AE + BC$ .

24. Fie punctul  $F$  pe înălțimea  $(AD)$  a triunghiului dreptunghic  $ABC$ . Perpendiculara în  $F$  pe  $FC$  taie latura  $AB$  în  $E$ , iar paralela prin  $A$  la  $FE$  taie  $BC$  în  $H$ . Demonstrați că  $AEFH$  este paralelogram.

25. Fie triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ ,  $H \in AD$ . Fie  $HP \perp HC$ ,  $P \in AB$ ,  $AM \parallel PH$ ,  $M \in BC$ . Demonstrați că:

- $MH \perp AC$ ;
- $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACH$ ;
- $AMHP$  este paralelogram.

26. Fie  $ABCD$  paralelogram,  $AC > BD$ ,  $BN \perp AC$ ,  $N \in AC$ ,  $m(\sphericalangle ACD) = 50^\circ$ ,  $m(\sphericalangle ABN) = 40^\circ$ , iar raportorul unghiurilor ascuțite ale lui  $BNC$  este egal cu  $\frac{1}{2}$ . Fie  $BN \cap AD = \{P\}$ , iar  $[BM$  bisectoarea lui  $\sphericalangle BPD$ ,  $M \in BC$ .

- Determinați măsurile unghiurilor paralelogramului.
- Demonstrați că triunghiul  $BMP$  este echilateral.

27. Fie  $D \in (BC)$  în triunghiul  $ABC$ . Paralelele prin  $D$  la  $AB$  și  $AC$  intersectează paralela prin  $A$  la  $BC$  în  $E$  și  $F$ . Demonstrați că  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  sunt concurente.

28. Fie paralelogramul  $ABCD$ ,  $E, F \in (BD)$ , astfel încât  $BE = EF = FD$ ,  $BC \cap AE = \{N\}$ ,  $CD \cap AF = \{P\}$ ,  $AB \cap CE = \{R\}$ ,  $AD \cap CF = \{M\}$ . Demonstrați că dreptele  $AC$ ,  $EF$ ,  $MN$ ,  $PR$  sunt concurente.