Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VIII-a
partea a II-a
ediția a XI-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 11-a, reviz.. - Pitești : Paralela 45, 2022
2 vol.
ISBN 978-973-47-3646-1
Partea 2. - 2022. - ISBN 978-973-47-3765-9

I. Negrilă, Maria

51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicației MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

- * **Inițiere (înțelegere)**
- ** **Consolidare (aplicare și exersare)**
- *** **Excelență (aprofundare și performanță)**
- **** **Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Algebră

Capitolul I
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

C1. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
C2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
C3. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
C4. Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
C5. Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

PE-PP 1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP 1.1. Adunarea şi scăderea

Suma (**diferența**) a două **rapoarte** algebrice este tot un **raport** algebric. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

a) dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;

b) dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

Observaţie:

Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

Exemple:

a) $\frac{5x-3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x^2+12}{4}=\frac{5x-3+x+x^2+12}{4}=\frac{x^2+6x+9}{4}=\frac{(x+3)^2}{4}$;

b) $\frac{2x+7}{3x}+\frac{x-3}{2x^2}+\frac{4x+5}{6}=\frac{2x(2x+7)}{6x^2}+\frac{3(x-3)}{6x^2}+\frac{x^2(4x+5)}{6x^2}=\frac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

a) $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{3x+2}{7}+\frac{4x+5}{7}$; c) $\frac{2-3x}{11}+\frac{9-8x}{11}$;

d) $\frac{4x+6}{3}+\frac{x+3}{3}$; e) $\frac{x-3}{2}+\frac{3x+4}{2}+\frac{4x+7}{2}$; f) $\frac{x+5}{3}+\frac{2-7x}{2}+\frac{2x-4}{5}$.

2. Efectuați calculele:

a) $\frac{7x-6}{x-2}+\frac{2-5x}{x-2}$; b) $\frac{17x+9}{x+1}+\frac{8}{x+1}$;

c) $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{2x-14}{x-3}$; d) $\frac{6x}{3x-2}+\frac{5-3x}{3x-2}-\frac{7}{3x-2}$.

3. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2}+\frac{x+2}{3x}-\frac{5x^2+4}{6x^2}$; b) $\frac{2x}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}$; c) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x+2}{x^2-1}$;

d) $\frac{x(x-1)}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2}{x^2-2x}+\frac{2-3x}{x^2-2x}$; f) $\frac{x^2+3}{x^2+2x-3}+\frac{4x}{x^2+2x-3}$;

g) $\frac{x(x-3)}{x^2-16}+\frac{2x-5}{x^2-16}-\frac{11-x}{x^2-16}$.

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați:

a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$; b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$;

c) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}$; d) $\frac{4}{x+2}-\frac{x+10}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$;

e) $\frac{1-3x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}+\frac{5}{3x}$; f) $\frac{3x+1}{2x^2-6x}-\frac{x+2}{3x-9}+\frac{2x-1}{6x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+4}{x^2+3x+2}-\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}+\frac{1-x}{x+1}$;

c) $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+2}+\frac{x^2+16}{x^2-4}$; d) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}+\frac{5-x^2}{x^2+3x+2}$.

6. Calculați:

a) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}+\frac{24}{x^2-9}$;
b) $\frac{x+1}{x-4}+\frac{16-6x}{x^2-16}-\frac{x-1}{x+4}$;

c) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-3}{x-4}+\frac{5}{x^2-7x+12}$;
d) $\frac{x-5}{x-2}-\frac{x+1}{x-4}-\frac{6}{x^2-6x+8}$.

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

a) $\frac{x^2+4}{x^2-4}-\left[\frac{5}{x-2}-\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\right]$;

b) $\frac{4x+5}{x^2-1}-\left[\frac{2}{x-1}-\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right]$;

c) $\frac{x^2-27}{x^2-9}-\left[\frac{5}{x+3}-\left(\frac{x}{x-3}-\frac{x+1}{x+3}\right)\right]$;

d) $\frac{x}{x^2-25}-\left[\frac{3}{x-5}-\left(\frac{x+1}{x-5}-\frac{3}{x+5}+\frac{x^2}{25-x^2}\right)\right]$.

8. Fie expresia $E(x)=\frac{3}{4x^2-9}-\frac{x+1}{2x+3}-\frac{x}{2x-3}$.

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

9. Se consideră expresia $F(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2-1}$.

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

b) Arătați că $G(x) = (x + 1) \cdot F(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma: $F(2) \cdot F(3) + F(3) \cdot F(4) + \ldots + F(2020) \cdot F(2021)$.

PE-PP Supermate ****

10. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}\right)-\left[\frac{x+1}{x+3}+\left(\frac{x+2}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x+4}+\frac{24}{x^2-16}\right)-\left[\frac{x+3}{x+4}-\left(\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-2}{x+4}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

PE-PP 1.2. ÎNMULŢIREA. ÎMPĂRŢIREA. RIDICAREA LA PUTERE

Produsul a două rapoarte algebrice, **câtul** a două rapoarte algebrice, **puterea a *n*-a** a unui raport algebric, $n \in \mathbb{Z}$, sunt tot rapoarte algebrice.

Produsul a două rapoarte algebrice este raportul algebric care are ca numărător produsul numărătorilor rapoartelor date, iar ca numitor produsul numitorilor rapoartelor date.

Exemple: a) $\dfrac{4x^2}{3y} \cdot \dfrac{9y^2}{8x^3} = \dfrac{3y}{2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $\dfrac{3x}{5x+5} \cdot \dfrac{10x+10}{18x^2} = \dfrac{1}{3x}$, $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Inversul unui raport algebric este raportul algebric care are ca numărător numitorul raportului dat, iar ca numitor numărătorul raportului dat.

Exemple: a) $\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\left(\dfrac{3xz}{19ab}\right)^{-1} = \dfrac{19ab}{3xz}$, $x, z, a, b \in \mathbb{R}^*$.

Câtul a două rapoarte algebrice este raportul algebric obținut prin înmulțirea primului raport, numit deîmpărțit, cu inversul celui de-al doilea raport, numit împărțitor.

Exemple: a) $\dfrac{4x^2+8}{9x} : \dfrac{2x^2+4}{27x^2} = 6x$, $x \in \mathbb{R}^*$; b) $\dfrac{10x^2}{7y^6} : \left(-\dfrac{15x^3}{14y^4}\right) = -\dfrac{4}{3y^2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Puterea a *n*-a a unui raport algebric este raportul care are ca numărător puterea a *n*-a a numărătorului raportului dat, iar ca numitor puterea a *n*-a a numitorului raportului dat.

Exemple: a) $\left(\dfrac{2x}{3y}\right)^2 = \dfrac{4x^2}{9y^2}$, $y \in \mathbb{R}^*$; b) $\left(\dfrac{x+1}{y^2+1}\right)^2 = \dfrac{(x+1)^2}{(y^2+1)^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

a) $\dfrac{2x}{7x+7} \cdot \dfrac{14x+14}{4x^2}$; b) $\dfrac{2x+6}{5x^2} \cdot \dfrac{10x}{4x+12}$; c) $\dfrac{3x+6}{7x^2} \cdot \dfrac{14x^2+28x}{x^2+4x+4}$;

d) $\dfrac{x^2-2x}{5x^2} \cdot \dfrac{5x+10}{x^2-4}$; e) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \dfrac{3x^2-3x}{x^2+x}$; f) $\dfrac{3x+9}{x^2+2x} \cdot \left(-\dfrac{3x+6}{2x+6}\right)$.

2. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor algebrice:

a) $\dfrac{x^2-9}{x^2+5x+6} \cdot \dfrac{x^2-4}{x^2-6x+9}$; b) $\dfrac{4x+8}{x^2+4x+4} \cdot \dfrac{x^2-4}{4x-8}$;

c) $\dfrac{x^2+4x}{x^2-16} \cdot \dfrac{3x-12}{5x+25}$; d) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \dfrac{x^2-3x+2}{4x+4}$;

e) $\dfrac{7x+35}{x^2-25} \cdot \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4x+4}$; f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2} \cdot \dfrac{x^2+x}{x^2-4x+4}$.

Capitolul II
Funcții

PP **Competenţe specifice**

C1. Identificarea unor dependenţe funcţionale în diferite situaţii date

C2. Descrierea unor dependenţe funcţionale într-o situaţie dată, folosind diagrame, tabele sau formule

C3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcţii cu scopul caracterizării acestora

C4. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependenţe funcţionale

C5. Analizarea unor funcţii în context intra şi interdisciplinar

C6. Modelarea cu ajutorul funcţiilor a unor fenomene din viaţa reală

PE-PP

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B, spunem că am definit o funcție de la A la B.

Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** sau mulțimea în care funcția ia valori. În general, o funcție f definită pe A cu valori în mulțimea B va fi notată $\boldsymbol{f : A \to B}$. Citim „f definită pe A cu valori în B”. Funcțiile se notează de obicei cu f, g, h, … .

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, dacă aceasta face ca elementului $a \in A$ să-i corespundă elementul $b \in B$, scriem $f(a) = b$ și spunem că b este valoarea funcției în a.

Legătura pe care o stabilește funcția între elementele $x \in A$ și valorile corespunzătoare $f(x)$ din B se numește **lege de corespondență**. O funcție se descrie prin trei componente:
- domeniul de definiție;
- codomeniul;
- legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții poate fi dată în mai multe moduri:

a) se poate descrie cu ajutorul **diagramelor**;

b) se poate exprima prin indicarea într-un **tabel** a valorilor corespunzătoare elementelor din domeniul de definiție;

c) se poate descrie cu ajutorul unei **formule** prin care se precizează valoarea $f(x)$ pentru oricare x din domeniul de definiție.

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, mulțimea punctelor din plan având coordonatele (x, y), unde $x \in A$, iar $y = f(x)$, va fi numită **graficul funcției**. Această mulțime se scrie $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$.

Egalitatea $y = f(x)$, adevărată pentru oricare element $x \in A$, va fi numită **ecuația graficului** funcției f. Se obișnuiește să se noteze $y = f(x)$, $x \in A$.

Fie $f: A \to B$ o funcție. **Imaginea** (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\operatorname{Im} f \subset B$.

Se mai poate scrie și astfel:

$$\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încât } y = f(x)\}.$$

O funcție ale cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere) se numește **funcție numerică**.

Două funcții $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Se notează $f = g$.

În general, o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a și b sunt numere reale) se numește **funcție liniară**. Reprezentarea geometrică a mulțimii grafic pentru o funcție liniară este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să dăm variabilei x două valori distincte.

Observații:

1. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = ax$, ale căror grafice conțin originea axelor de coordonate.

2. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = b$, ale căror grafice sunt drepte paralele cu axa Ox. Funcțiile de acest fel sunt numite funcții constante nenule.

3. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = b = 0$, se obține o funcție $f(x) = 0$, al cărei grafic coincide cu axa Ox.

4. Uneori, pentru trasarea graficului unei funcții liniare este mai comod să se stabilească punctele în care graficul intersectează axele de coordonate.

$$G_f \cap Oy = A(0; f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0; b);\ G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right).$$

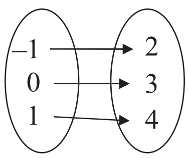
PE-PP 1. Funcții definite pe mulțimi finite

Exemple:

1. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel funcția următoare:

$$f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 3.$$

Soluție: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(0) = 0 + 3 = 3$, $f(1) = 1 + 3 = 4$.



x	-1	0	1
$f(x)$	2	3	4

2. Explicitați domeniul de definiție pentru funcția

$$f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x} \text{ și } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}.$$

Soluție: Cum $x \neq 0 \Rightarrow A = \{-1, 1, 2\}$.

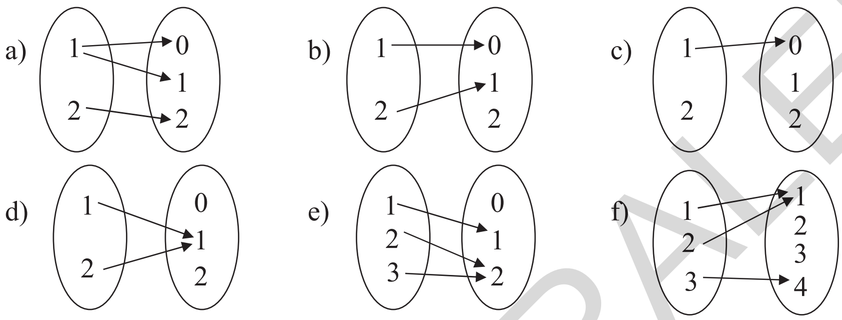
3. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care punctul $B(1; -1)$ aparține graficului funcției.

Soluție: $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Dacă $B(1; -1) \in G_f \Rightarrow f(1) = -1$. Cum $f(1) = a + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$.

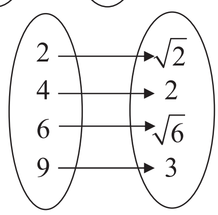
● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

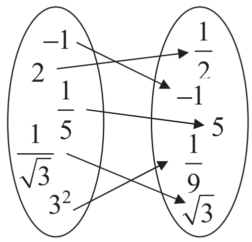
1. Precizați care dintre diagramele de mai jos definesc funcții:



2. Diagrama alăturată definește o funcție.
a) Precizați domeniul și codomeniul funcției.
b) Reprezentați printr-un tabel funcția definită de diagramă.
c) Stabiliți legea de corespondență printr-o formulă.



3. În diagrama alăturată este descrisă o funcție $f: A \to B$.
a) Precizați elementele mulțimilor A și B.
b) Realizați tabelul de valori al funcției f.
c) Descrieți corespondența $x \to f(x)$ printr-o formulă.



4. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile următoare:
a) $f: \{0, 2, 4\} \to \{0, 2, 4, 6\}, f(x) = x + 2$;
b) $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, g(x) = x^2$.

5. Prețul unui kilogram de mere este 2 lei. Completați tabelul:

Cantitatea (kg)	3	4,5	7	10	13	35	96
Prețul total (lei)					26		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel.
b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.
c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

6. Un automobil are de parcurs un drum de 360 km. Completați tabelul:

Timpul (ore)	6	8	4	9	12	18
Viteza (km/h)		45				

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

7. Un bazin cu capacitatea de 240 hl se umple cu ajutorul unor robinete cu debitul de 10 hl/h. Completați tabelul:

Numărul de robinete	6	4	2	8	12	24
Timpul de umplere (ore)			12			

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

8. Care dintre tabelele de mai jos descrie o funcție?

a)

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	3

b)

x	1	2	1
$f(x)$	2	4	5

c)

x	–1	2	4
$f(x)$	0	4	6

d)

x	–2	–1	0	1	–1
$f(x)$	4	5	3	2	1

9. Care dintre următoarele relații nu reprezintă o funcție?

a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1\}, f(x) = x^2$.

b) $g: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}, g(x) = x^2$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{2}{x}$.

10. Fie funcția $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}, f(x) = |x|$.

a) Stabiliți elementele mulțimii grafic.

b) Stabiliți care dintre punctele $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(1; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(0; 0)$ se găsesc pe graficul funcției.

11. Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$. Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției: $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(0; 3)$, $D(1; 5)$, $E(2; 6)$.

12. Determinați Im f (mulțimea valorilor funcției) în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;

c) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$.

13. Pentru funcțiile următoare, stabiliți codomeniul cu numărul minim de elemente, știind că:

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to B$, unde $f(x) = x + 3$;

b) $f: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = x^2 - 2$;

c) $f: \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

Geometrie

Capitolul I
Arii şi volume

PP **Competenţe specifice**

- C_1. Identificarea corpurilor geometrice şi a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora
- C_2. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora
- C_3. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice
- C_4. Utilizarea unor termeni şi expresii specifice pentru descrierea proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice
- C_5. Analizarea condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică spaţială să verifice anumite cerinţe date
- C_6. Interpretarea informaţiilor referitoare la distanţe, arii şi volume după modelarea printr-o configuraţie spaţială a unei situaţii date de cotidian

PE-PP 1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat de latură $AB = 4$ cm, iar înălțimea $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) măsura unghiului format de muchiile CC' și AB;
b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu latura AD;
c) măsura unghiului format de diagonala AC cu planul (ADD').

2. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BD' = 15$ cm. Aflați:

a) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);
b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu fața (ADD').

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (ABC);
b) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (ADD');
c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ADD') și (BDD').

4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm și diagonala $BD' = 25$ cm. Aflați:
a) distanța de la punctul C la diagonala AC';
b) sinusul unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC');
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm. Calculați:
a) distanța de la punctul C' la diagonala BD;
b) măsura unghiului format de diagonalele BC' și AB';
c) distanța de la C la planul $(C'BD)$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 12$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD');
b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);
c) distanța de la A la diagonala BD'.

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:
a) distanța de la A' la latura BC;
b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:
a) sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAD), unde D este mijlocul laturii BC;
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de o față laterală cu planul bazei.

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $AB = VA = 12$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);
c) măsura unghiului format de latura BC cu planul (VAC).

10. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 20$ cm și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei egală cu $45°$.
a) Calculați măsura unghiului diedru format de planele (VAC) și (VBD).
b) Calculați distanța de la B la planul (VAC).
c) Dacă $P \in VO$, astfel încât distanța de la P la planul (ABC) este egală cu distanța de la P la fața (VBC), aflați lungimea segmentului PO.

PE Aplicare și exersare **

11. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BC' = 12$ cm. Aflați:
a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;
b) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$;
c) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (ABC).

12. Prisma regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei $AB = 4\sqrt{3}$ cm și diagonala $AD' = 8$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul A la planul (BDD');

b) tangenta unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

13. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm și $AA' = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;

b) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și (ABC);

c) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$.

14. Prisma regulată $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei $AB = 8$ cm, iar înălțimea $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul D la planul $(D'AB)$;

b) măsura unghiului format de muchia DD' cu planul $(D'AB)$.

15. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{6}$ cm și diagonala $BC' = 18$ cm. Calculați:

a) distanța de la vârful A la diagonala BD';

b) distanța de la vârful A' la diagonala BC'.

16. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{3}$ cm și $BC' = 24$ cm. Calculați:

a) distanța de la vârful A' la diagonala BC';

b) sinusul unghiului format de BD' cu fața (ADD');

c) măsura unghiului format de diagonala AB' cu planul (BCC').

17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu diagonala bazei egală cu $10\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) distanța de la B la planul (ACC');

b) măsura unghiului format de BC cu planul (ACC');

c) măsura unghiului format de BC' cu planul (ACC').

18. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Aflați:

a) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și (ABC);

b) distanța de la D la planul $(D'AC)$;

c) sinusul unghiului format de muchia DC cu planul $(D'AC)$.

19. În prisma regulată $ABCA'B'C'$, latura bazei este $AB = 16$ cm, iar înălțimea este $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Dacă D este mijlocul laturii BC, calculați:

a) distanța de la C' la dreapta AD;

b) distanța de la C la planul $(C'AD)$;

c) măsura unghiului diedru determinat de planele $(C'AD)$ și (ABC).

20. Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are latura bazei $AB = 12\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $SA = 4\sqrt{13}$ cm. Calculați:

a) sinusul unghiului diedru determinat de planele (SAD) și (SAB), unde D este mijlocul laturii BC;

b) distanța de la D la planul (SAB).

21. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are fețele laterale triunghiuri dreptunghice și isoscele, iar latura bazei $AB = 12$ cm.

a) Calculați distanța de la C la planul (VAB).

b) Arătați că $(VBC) \perp (VAD)$, unde D este mijlocul laturii BC.

c) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (VAB) și (VAD).

22. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = 6$ cm, iar distanța de la centrul O al bazei la fața (VBC) egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) distanța de la A la planul (VBC);

c) măsura unghiului diedru format de planul (VBC) cu planul (ABC).

23. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are apotema $VM = 12$ cm, unde M este mijlocul laturii BC și $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 45°$. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) măsura unghiului diedru format de fețele (VBC) și (VAD);

c) distanța de la O, centrul bazei, la o față laterală.

PE Aprofundare și performanță ***

24. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $BC = 8$ cm și $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) distanța de la vârful B' la diagonala AD';

b) distanța de la vârful C' la diagonala BD;

c) măsura unghiului format de dreapta AD' cu planul (DCC').

25. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 20$ cm, $AA' = 12$ cm și $BC = 15$ cm. Calculați:

a) tangenta unghiului format de diagonala $B'D$ cu planul (ABC);

b) distanța de la C la planul $(C'BD)$;

c) sinusul unghiului format de muchia BC cu planul $(C'BD)$.

26. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala egală cu $8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului diedru format de planele (ACC') și (BCC');

b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu $D'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$;

c) măsura unghiului format de BC' cu MO, unde $\{M\} = AD' \cap DA'$.

27. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala bazei egală cu $18\sqrt{2}$ cm. Fie $M \in CC'$, astfel încât $CM \equiv MC'$. Aflați:

a) distanța de la D' la dreapta de intersecție a planelor $(D'BM)$ cu (ABC);

b) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planul $(D'BM)$ cu planul (ABC).

28. Prisma regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de dreptele $A'C$ și BC';

b) distanța de la A' la dreapta de intersecție a planelor $(A'BC')$ și (ABC).

29. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și diagonala $A'B = 12$ cm, iar M este mijlocul muchiei CC'. Calculați:

a) distanța de la M la diagonala $A'B$;

b) distanța de la A' la dreapta de intersecție a planelor $(A'BM)$ și (ABC);

c) măsura unghiului diedru determinat de planele $(A'MB)$ și (ABC).

Cuprins