BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ

Redactare: Olimpia Filip, Daniel Mitran
Tehnoredactare: Ovidiu Mictar
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANDREI, GHEORGHE
Partea întreagă [x] : partea fracţionară {x} / Gheorghe Andrei, Constantin Caragea ; pref. de Radu Gologan. - Piteşti : Paralela 45, 2018
2 vol.
ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. 1. - 2018. - Conţine bibliografie. - ISBN 978-973-47-2694-3

I. Caragea, Constantin
II. Gologan, Radu N. (pref.)

51

Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ [*x*]
PARTEA FRACŢIONARĂ {*x*}

VOLUMUL I

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

CUPRINS

		Enunțuri	Soluții
Prefaţă		7	
Introducere		9	
Capitolul I	Proprietăţi	11-30	
Capitolul II	Aplicaţii de bază	31-38	39-57
Capitolul III	Progresii în care intervin partea întreagă și partea fracționară	58-60	61-68
Capitolul IV	Aplicații ale identității lui Hermite	69-96	
Capitolul V	Partea întreagă și partea fracționară a unor expresii cu radicali........................	97-101	102-118
Capitolul VI	Egalități și identități................................	119-126	127-156
Capitolul VII	Mulțimi	157-161	162-181
Capitolul VIII	Ecuații	182-207	208-318
Capitolul IX	Ecuații cu parametri	319-329	330-386
Capitolul X	Ecuații cu mai multe necunoscute	387-389	390-400
Capitolul XI	Inecuații	401-403	404-417
Capitolul XII	Sisteme	418-428	429-449
Bibliografie		450	

PREFAȚĂ

De-a lungul a aproape jumătate de secol, profesorii constănţeni Gheorghe Andrei şi Constantin Caragea au şlefuit matematic minţile a mii de foşti elevi, nu neapărat atunci avizi de matematică, dar azi intelectuali de vază, unii dintre ei făcând cinste României pe multe continente. Alţii sunt în prezent matematicieni renumiţi, ce duc mai departe faima şcolii româneşti de matematică.

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiţi azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin problemele propuse la toate etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de faţă este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr. De această noţiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică. De exemplu, chestiunile legate de ordinul de aproximare a unui număr iraţional cu un număr raţional conţin încă multe probleme deschise.

Cele nouăsprezece capitole ale cărţii fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noţiunea de parte întreagă sau parte fracţionară. Acestea conţin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta minţile deschise ale copiilor.

Radu Gologan

INTRODUCERE

Cartea este o adevărată megaculegere de probleme care se adresează elevilor și profesorilor pasionați de matematică, în dorința de a obține performanțe sporite.

Ea are rolul de a ușura activitatea de căutare și selectare a problemelor cu partea întreagă și partea fracționară din diferite culegeri și publicații de matematică, întrucât această megaculegere este destul de cuprinzătoare. Ea reprezintă un izvor și un stimulator de abordare creatoare a altor probleme pe această temă.

Cu această ocazie aducem mulțumiri și felicitări tuturor autorilor multor probleme deosebite și fără de care cartea ar fi fost mai săracă și incompletă.

Au fost multe situații care ne-au pus „probleme” în găsirea soluțiilor, dar au fost și probleme asemănătoare propuse însă de „autori” diferiți. (Ne cerem anticipat scuze dacă am omis unii autori de probleme.)

Această carte este centrată pe un singur capitol de matematică: ***Partea întreagă și partea fracționară***, temă aproape inexistentă acum 30-40 de ani și mult mai frecventă în ultimii 15-20 de ani, atât în manuale, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cât şi în concursurile școlare. Prin cantitatea și varietatea problemelor și mai ales prin abordarea diferențiată a temelor cuprinse în cele 19 capitole, cartea reprezintă o adevărată enciclopedie a acestei teme.

Lucrarea acoperă un gol bibliografic, deoarece până acum elevii și profesorii nu aveau la îndemână un astfel de vast material de studiu.

Prima carte pe această temă a apărut la noi în țară în anul 1996, la Editura GIL, autori fiind Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu și Constantin Caragea, și anume, *Probleme de algebră – gimnaziu și liceu*. *Funcțiile „partea întreagă” și „partea fracționară”*, urmată fiind de cartea regretatului profesor Mihai Onucu Drîmbe, *200 de identități și inegalități cu „partea întreagă”*, Editura GIL, 2003.

Prin multele probleme de nivel ridicat, prezenta culegere poate sta la baza formării competențelor sporite în acest domeniu. Ea ar trebui să se afle la oricare centru de excelență, în orice școală unde se pregătesc olimpici și chiar în posesia oricărui elev capabil și doritor de performanță.

În fiecare capitol există o ierarhizare a problemelor, în funcție de gradul de dificultate, și anume: „probleme elementare”, nemarcate, probleme mai dificile, cu o steluță, iar cele foarte dificile, cu două sau trei steluțe. Desigur, problemele de nivel standard, nemarcate, pot fi considerate ca „repere" necesare abordării celor mai dificile dintre ele.

Chiar dacă unele probleme sunt asemănătoare sau îmbracă o „haină mai veche", ele au fost totuși puse cu respectul cuvenit istoriei lor și care confirmă progresul abordărilor pe această temă în ultimii 20-30 de ani.

Sunt destule probleme care apar în unul sau două capitole, deoarece ele pot fi încadrate tematic în aceste capitole. În cadrul aceleiași teme, megaculegerea cuprinde 19 capitole diferențiate pe anumite subteme. Vom enumera câteva: Cap. I – Proprietăți, Cap. II – Aplicaţii de bază, completat cu Cap. V – Partea întreagă şi partea fracţionară a unor expresii cu radicali și Cap. VI – Egalități și identităţi, Cap. XV – Inegalități, Cap. VIII, IX, X – Ecuații, ecuații cu parametri, respectiv ecuații cu mai multe necunoscute, Cap. XII – Sisteme, Cap. XIII – Elemente de aritmetică, Cap. XIV – Sume, Cap. XVI și XVII – Șiruri, respectiv funcții, care conțin probleme ce aduc o completare a capitolelor respective din clasele a IX-a, a X-a și a XI-a. Capitolul XIX – Paragrafe speciale cuprinde chiar câteva paragrafe speciale care pun în evidență o gamă largă de aplicabilitate a funcției „partea întreagă" și „partea fracționară": funcția de rotunjire, funcția lui Legendre cu aplicații, funcțiile $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$ (cu notațiile consacrate), spectrul unui număr, puncte laticiale etc.

Megaculegerea conține peste 1700 de probleme și proprietăți importante cu aplicativitate imediată la alte probleme. Pentru ca această carte să fie accesibilă unui număr mai mare de elevi și profesori, soluțiile sunt destul de detaliate, iar multe dintre probleme au câte două sau trei soluţii.

Pentru alcătuirea acestei culegeri de probleme, s-a depus o muncă susținută pe parcursul mai multor ani, consultându-se un uriaș material bibliografic, iar ca urmare, autorii înșiși şi-au sporit competențele în acest domeniu.

Așteptăm soluții deosebite sau abordări interesante, precum și noi probleme pe această temă, ce vor fi cuprinse într-o viitoare ediție (e-mail: profandreigheorghe@gmail.com).

Autorii

capitolul 1

Proprietăţi

Definiția 1:

Numim partea întreagă a unui număr real *x*, cel mai mare număr întreg, mai mic decât *x*. Acest număr se notează cu $[x]$.

Prin urmare, oricare ar fi numărul real *x*, există o infinitate de numere întregi mai mici decât *x*. Din mulțimea acestora, alegem pe cel mai mare întreg, care evident depinde de *x* și se notează $[x]$.

În baza axiomei lui Arhimede putem enunţa următoarea definiție.

Definiția 2:

Pentru orice număr real *x*, există un număr întreg m (unic determinat) astfel încât $m \leq x < m+1$. Numărul m se numește parte întreagă a lui *x*, adică $m = [x]$.

Avem $[x] = \begin{cases} m, & \text{pentru } m \leq x < m+1 \\ -m, & \text{pentru } -m \leq x < -m+1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{N}$.

P$_1$. Toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeași parte întreagă: $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1)$, $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}$.

P$_2$. Numerele $x, y \in \mathbb{R}$ aparțin aceluiași interval $[m, m+1)$ dacă și numai dacă $[x] = [y]$.

P$_3$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $[x] \leq x < [x] + 1$;

b) $x - 1 < [x] \leq x$.

P$_4$. a) $x < 0 \Leftrightarrow [x] < 0$;

b) $x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0$.

Definiția 3:

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $x - [x] = t \in [0,1)$ se numește partea fracționară a numărului real și se notează cu $\{x\}$.

Avem $x - [x] = \{x\} \Leftrightarrow x = [x] + \{x\}$.

Observație: Oricare ar fi expresia E, se pot scrie inegalitățile analoage lui **P$_3$**:

$$[E] \leq E < [E] + 1 \text{ și } E - 1 < [E] \leq E$$

și prin urmare
$$E = [E] + \{E\}.$$

P$_5$. a) $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$;

b) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ (punctele fixe ale funcției $[\cdot]$);

d) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in [0,1)$ (punctele fixe ale funcției $\{\cdot\}$).

P_6. a) $\big[[x]\big] = [x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\big\{\{x\}\big\} = \{x\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$;

c) $[\{x\}] = \{[x]\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Proprietățile **P_5**, **P_6** rezultă din definițiile părții întregi și părții fracționare.

P_7. Dacă $[a] = [b]$, atunci $|a - b| < 1$. Reciproca nu este adevărată.

Soluție: Dacă $[a] = [b] = m \Rightarrow a, b \in [m,m + 1) \Rightarrow |a - b| < 1$ sau din $[a] = [b] \Leftrightarrow a - \{a\} = b - \{b\} \Rightarrow a - b = \{a\} - \{b\} \in (-1,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow |a - b| < 1$.

P_8. $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{a - b\} = 0$.

Soluție: Din $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - [a] = b - [b] \Leftrightarrow a - b = [a] - [b] \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a - b\} = 0$. De fapt dacă $a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a$ și b au aceeași parte fracționară.

P_9. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $[m + x] = m + [x]$.

Demonstrație: Din $[x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow m + [x] \le x + m < m + [x] + 1$ deci $m + x$ este cuprins între doi întregi consecutivi, prin urmare

$$[m + x] = m + [x].$$

Observație 1:

Are loc și afirmația reciprocă: Dacă $[m + x] = m + [x]$, atunci $m \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr din $[m + x] = [m] + \{m\} + [x] \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{10}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $\{m + x\} = \{x\}$.

Demonstrație: Se utilizează egalitatea precedentă. Din
$[m + x] = m + [x] \Rightarrow m + x - \{m + x\} = m + x - \{x\} \Rightarrow \{m + x\} = \{x\}$.

Observație: Are loc și afirmația reciprocă: dacă $\{m + x\} = \{x\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.
Din $\{[m] + \{m\} + x\} = \{x\} \Rightarrow \big\{\{m\} + x\big\} = \{x\} \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{11}. a) Funcția $[\cdot]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ este crescătoare.

b) Funcția $\{x\}: \mathbb{R} \to [0,1)$ este periodică și strict crescătoare pe orice interval de forma $[m, m + 1], m \in \mathbb{Z}$.

c) Dacă $f(x) = [x] \Rightarrow Imf = \mathbb{Z}$.

d) Dacă $g(x) = \{x\} \Rightarrow Img = [0,1)$.

capitolul 7

Mulţimi

1. Să se determine mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = x\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = x\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = |x|\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] + x = k \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid [a][x] = 0, a \in \mathbb{R}\}$;
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]\{x\} = 0\}$;
g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \{[x]\} = [\{x\}]\}$;
h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid \{|x|\} = |\{x\}|\}$;
i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid [|x|] = |[x]|\}$.

2***.** Să se determine mulțimile și să se reprezinte în plan mulțimile de puncte

a) $A = \{(x,y) | [x] = [y]\}$;
b) $B = \{(x,y) | \{x\} = \{y\}\}$;
c) $C = \{(x,y) | [x] \cdot [y] = 1\}$;
d) $D = \{(x,y) | [x] \cdot [y] = p\}, p$ prim;
e) $E = \{(x,y) | [x] + [y] = 1\}$;
f) $F = \{(x,y) | [x] = |y|\}$;
g) $G = \{(x,y) \big| |x| = |y|\}$.

3*. Demonstrați că $\left\{y \in \mathbb{R} | y = \dfrac{x - [x]}{x}, x \in [1, \infty)\right\} = \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Fie $M = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{x + [x]} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 1\right\}$.

Să se determine mulțimea M.

5. Să se determine elementele mulțimii

$$A = \left\{a \in \mathbb{N} \middle| \left[\frac{5x+1}{2}\right] + \left[\frac{5y+2}{2}\right] = a, x, y \in \mathbb{N}\right\}.$$

6. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]^3 - 4[x] - 20 = -[x]^2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\{x\}^2 + \{x\} = 1\}$. Să se determine $A \cap B$.

7. Să se determine mulțimea

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left[x + \frac{3}{8}\right] + [x] = \frac{7x-2}{3}\right\}.$$

8*. Determinați mulțimea
$$M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{x+[x]} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x}} = x\right\}.$$
9*. Să se determine mulțimile:
$$\text{a) } A = \left\{(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \middle| \left[\frac{n^2+1}{n}\right] = \frac{2005}{p^2+1}\right\};$$
$$\text{b) } B = \left\{(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \middle| \frac{n^2+1}{n} = \left[\frac{2005}{p^2+1}\right]\right\}.$$
10. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim mulțimile
$$A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + [x] \leq n\} \text{ și}$$
$$B_n = \{x \in \mathbb{R} | x + [x^2] \leq n\}.$$
Să se demonstreze că $A_n \subset B_{n+1}$ și $B_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
11. Fie mulțimile
$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \left[\sqrt{x-1}\right] = \frac{x-1}{2}\right\} \text{ și } B = \left\{y \in \mathbb{Z} \middle| \left[\sqrt{y-2}\right] = \frac{3y-7}{2}\right\}.$$
Să se determine $A \cap B$ și $A \cup B$.
12*. Să se determine mulțimile
$$A = \{x | x \geq 0 | [x^2] = [x]^2\} \text{ și}$$
$$B = \{x | x \leq 0 | [x^2] = [x]^2\}.$$
13. Să se determine mulțimea
$$M = \left\{x \geq 1 | x^{[x]} = [x]^x\right\}.$$
14*. Să se determine cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii
$$A_n = \left\{n + \left[\frac{1999}{n}\right], n = \overline{1,1999}\right\}.$$
15*. Să se determine cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii
$$A_n = \left\{n + \left[\frac{2003}{n}\right], 1 \leq n \leq 2003\right\}.$$
16. Să se determine cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii:
$$A = \left\{n + \left[\frac{2015}{n}\right] \middle| n \equiv \overline{1,2015}\right\}.$$
17. Fie $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și $A_n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.
Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât:
$$\sum_{k=1}^{n} [x + a_k] = [mx], \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{atunci } m = n \text{ și } A_n \subset [0,1).$$
18*. Să se determine mulțimea
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | [2^x] = 2^{[x]}\right\}.$$