Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea I

ediția a XIV-a

mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 14-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 –
2 vol.
ISBN 978-973-47-4294-3
Partea 1. – 2025. – ISBN 978-973-47-4295-0
I. Negrilă, Maria
51

Recapitulare şi evaluare inițială

PE Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

TESTUL 1

1. Efectuaţi calculele:

a) $\sqrt{6}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{8}-\sqrt{27}$; b) $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{108}-\sqrt{75}-\sqrt{27}\right)$;

c) $\left(\frac{4}{\sqrt{50}}+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)-\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $3(x+3)-5(x+1)=4(x+4)$; b) $|2x-3|=5$;

c) $\frac{4x-3}{3}-\frac{2x+1}{2}=1\frac{1}{6}$; d) $\sqrt{(x-2)^2}=\frac{1}{4}$; e) $(x+3)^2=25$.

3. Se consideră numerele $a=2\sqrt{432}-3\sqrt{75}-\sqrt{147}$ şi $b=3\sqrt{243}-3\sqrt{108}-\sqrt{27}$. Calculaţi media geometrică a numerelor a şi b.

4. Rezolvaţi sistemele:

a) $\begin{cases}2x-3y=17\\3x+2y=6\end{cases}$; b) $\begin{cases}3(2x+y)-2(x+2y-5)=20\\5(x-y+2)=4(2x-y+3)-13\end{cases}$.

5. Se consideră punctele $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ şi $C(3; 7)$.

a) Reprezentaţi punctele într-un sistem de axe de coordonate.
b) Arătaţi că punctele A, B şi C sunt coliniare.
c) Determinaţi coordonatele punctului M, mijlocul segmentului BC.

6. O persoană constată că după ce a cheltuit 25% din suma pe care a avut-o şi încă 20% din restul rămas, mai are în portofel 252 lei. Ce sumă a avut iniţial?

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ şi $\sphericalangle C = 30°$. Ştiind că mediana $AM = 10$ cm, $M \in BC$, calculaţi:

a) perimetrul triunghiului ABC;
b) valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}$, unde D este piciorul înălţimii duse din A pe ipotenuza BC.

8. În cercul de centru O şi rază $R = 8$ cm se construieşte diametrul AB şi o coardă CD, astfel încât $AB \cap CD = \{E\}$. Ştiind că $\sphericalangle BDC = 60°$, calculaţi aria triunghiului AOC.

Algebră

Capitolul I
Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$

PP Competenţe specifice

- C_1. Recunoaşterea apartenenţei unui număr real la o mulţime
- C_2. Efectuarea unor operaţii cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C_3. Utilizarea unor procedee matematice pentru operaţii cu intervale şi rezolvarea inecuaţiilor în $\mathbb{R}$
- C_4. Folosirea terminologiei aferente noţiunilor de mulţime, de interval numeric şi de inecuaţii
- C_5. Interpretarea unei situaţii date utilizând intervale şi inecuaţii
- C_6. Rezolvarea unor situaţii date, utilizând intervale numerice sau inecuaţii

PE-PP 1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

Mulţimea numerelor naturale, notată cu $\mathbb{N}$, este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Observaţii:

a) Mulţimea notată cu $\mathbb{N}^*$ este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:

i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ şi **consecinţele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.

ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $\boldsymbol{x \geq y}$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $\boldsymbol{z \in \mathbb{N}}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se foloseşte teorema **împărţirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.

iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepţia cazului 0^0.

Mulţimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$, este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Observaţii:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$ şi $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă şi numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq |t| < |y|$.

Mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$, este:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z}\right\}.$$

Observaţii:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr raţional** este reprezentat de o fracţie de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}^*$. Vom spune că două fracţii $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracţii echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracţie $\frac{x}{y}$, se obţin fracţii echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: $^{t)}\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y}^{(t} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$, $y, t \in \mathbb{Z}^*$ şi $t \mid x$, $t \mid y$.

c) O **fracţie** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr raţional** care este **reprezentat** de o fracţie $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărţind numărătorul x la numitorul y.

În funcţie de factorii în care se descompune numitorul fracţiei ireductibile $\frac{x}{y}$, fracţia zecimală poate fi:

i) **fracţie zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de **2** sau de **5**;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conţine **alţi** factori decât **2** şi **5**;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conţine atât factori de 2 sau/şi numai factori de 5, cât şi un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr raţional este reprezentat printr-o **fracţie zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracţie ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracţie zecimală:

i) **fracţie zecimală finită**: $\overline{a,b_1b_2b_3...b_n} = \dfrac{\overline{ab_1b_2b_3...b_n}}{10^n}$;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**: $\overline{a,(b_1b_2b_3...b_n)} = a\dfrac{\overline{b_1b_2b_3...b_n}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)} = \frac{\overline{ab_1b_2...b_nc_1c_2...c_m} - \overline{ab_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{000...0}_{\text{de } n \text{ ori}}}.$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulţimea numerelor iraţionale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulţimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este mulţimea formată din **reuniunea** mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **şirul incluziunilor**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

f) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$; g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;

k) $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; m) $\varnothing \subseteq \mathbb{Q}$; n) $\varnothing \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$; o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $8 \in \mathbb{N}$; b) $8 \in \mathbb{Z}$; c) $8 \in \mathbb{Q}$; d) $8 \in \mathbb{R}$; e) $-6 \in \mathbb{Z}$;

f) $-6 \in \mathbb{N}$; g) $-\dfrac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; h) $-8{,}3 \in \mathbb{R}$; i) $-\dfrac{9}{3} \in \mathbb{Z}$; j) $4{,}(5) \in \mathbb{Q}$;

k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\sqrt{25-(-3)\cdot(-8)} \in \mathbb{N}$; n) $[-(-3) + (-2)]^2 \in \mathbb{Z}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$;

d) $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$; f) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$;

g) $\{0\} \in \mathbb{R}$; h) $0 \notin \mathbb{R}^*$; i) $\{0\} \subset \mathbb{R}$; j) $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$.

PE Aplicare şi exersare **

14. Fie mulţimea $A=\left\{\sqrt{12};\ -\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{3\frac{1}{5}};\ \left(-\sqrt{2}\right)^{-1};\ -\sqrt{7};\ \sqrt{0,(3)}\right\}$.

Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $A\subset\mathbb{R}$; b) $A\subset(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; c) $A\subset\mathbb{Q}$.

15. Fie mulţimea $A=\left\{\left(\sqrt{3}\right)^{-1};\left(-\sqrt{2}\right)^{3};\sqrt{2\frac{2}{3}};-\sqrt{150};\sqrt{192};\sqrt{5^3};-\sqrt{2^5}\right\}$.

Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $A\subset\mathbb{Q}$; b) $A\subset(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; c) $A\not\subset\mathbb{R}$.

16. Fie mulţimea $A=\left\{(-2)^2;(-3)^{-2};\sqrt{0,09};\sqrt{5\frac{5}{9}};(-1)^4;\sqrt{18};\sqrt{1\frac{2}{25}};\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1};\sqrt{5\frac{3}{9}}\right\}$.

Determinaţi mulţimile: $A\cap\mathbb{N}$, $A\cap\mathbb{Z}$, $A\cap\mathbb{Q}$, $A\cap\mathbb{R}$, $A\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

17. Determinaţi elementele mulţimilor:

$A=\{x\in\mathbb{N}^*\mid x+3\mid 36\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}^*\mid 2x+1\mid 45\}$;

$C=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 27 \text{ şi } 8\mid x+5\}$; $D=\left\{x\in\mathbb{N}\mid\frac{15}{2x+1}\in\mathbb{N}\right\}$;

$E=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid\frac{21}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$; $F=\left\{x\in\mathbb{N}\mid\frac{2x+5}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$;

$G=\left\{x\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\}\mid\frac{3x+11}{x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$; $H=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid\frac{3x+9}{2x-3}\in\mathbb{Z}\right\}$.

În rezolvarea exerciţiilor următoare folosiţi, dacă este cazul, formula:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}},\ \text{unde } C^2=A^2-B.$$

18. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{5}-\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; b) $\sqrt{45}=\sqrt{20}+\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; d) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$;

e) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$; f) $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\left(\sqrt{2}\right)^2$.

19. Demonstraţi că următoarele numere nu sunt raţionale:

a) $\sqrt{5n+3}$; b) $\sqrt{5n+8}$; c) $\sqrt{7n+3}$;

d) $\sqrt{n^2+n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$; e) $\sqrt{4n^2+n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$; f) $\sqrt{2007^{2010}-2006^{2010}}$;

g) $\sqrt{1+3+3^2+...+3^{2010}}$; h) $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot2011+3}$; i) $\sqrt{456^{564}+321^{312}+215^{804}}$.

20. Arătaţi că $\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

21. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{x}\in\mathbb{R}$; b) $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c) $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$; d) $\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$,

unde $x=\sqrt{441+2+4+6+...+880}$.

22. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{x}\in\mathbb{R}$; b) $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$; c) $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; d) $\sqrt{x}\in\mathbb{N}$,

unde $x=\sqrt{243^2-(240^2+3\cdot240)}$.

23. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x\in\mathbb{R}$; b) $x\in\mathbb{Q}$; c) $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; d) $x\in\mathbb{Z}$,

unde $x=\sqrt{2010+2(1+2+3+...+2009)}$.

24. Determinaţi mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\setminus\{2\}\ \middle|\ \dfrac{\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

b) $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}+\sqrt{39+12\sqrt{3}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \dfrac{\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{41+12\sqrt{5}}}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

25. Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$, ştiind că acestea îndeplinesc condiţiile: $\overline{ab}\ \vdots\ 5$ şi $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}\in\mathbb{Q}$.

26. a) Arătaţi că $a=\sqrt{9^n\cdot2^{2n+1}-4^n\cdot3^{2n}}\in\mathbb{Q}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi $n\in\mathbb{N}$, astfel încât $a=216$.

27. Determinaţi cifra x, în baza 10, astfel încât:

a) $\sqrt{\dfrac{\overline{14x}}{27}}\in\mathbb{Q}$; b) $\sqrt{\dfrac{\overline{12x}}{18}}\in\mathbb{Q}$; c) $\sqrt{\dfrac{\overline{72x}}{5}}\in\mathbb{Z}$; d) $\sqrt{\dfrac{\overline{18x}}{4}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

PE-PP Supermate ****

28. Determinaţi numerele raţionale a şi b care îndeplinesc condiţia:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{2}+1}=7-3\sqrt{2}$; b) $a\left(2+\sqrt{5}\right)+\dfrac{b}{3-\sqrt{5}}=\sqrt{5}+4$;

c) $a\sqrt{3}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}+5$.

29. Fie numărul raţional $r\in\mathbb{Q}$. Dacă $11r\in\mathbb{Z}$ şi $13r\in\mathbb{Z}$, demonstraţi că $r\in\mathbb{Z}$.

PE **Nume** ______________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi propoziţii adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$, pentru care fracţia $\frac{18}{\overline{1a}}$ este ireductibilă, sunt ....

(0,5p) **2.** A patruzecea zecimală a fracţiei 0,25(123) este ....

(0,5p) **3.** Valorile naturale ale lui x, pentru care fracţia $\frac{7}{2x+1}$ este supraunitară, sunt ....

(0,5p) **4.** Valoarea naturală a lui x, pentru care fracţiile $\frac{12}{x+16}$ şi $\frac{16}{x+28}$ sunt echivalente, este ....

(0,5p) **5.** Dintre fracţiile 2,3(5) şi 2,(35), mai mare este ....

(0,5p) **6.** Fie $a = \sqrt{6}\left(\sqrt{54} + \sqrt{216}\right)$. Valoarea de adevăr a propoziţiei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este ....

II. Încercuiţi răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Forma ordinară corespunzătoare fracţiei zecimale 2,08(3) este:

A. $\frac{1883}{900}$ B. $\frac{1880}{900}$ C. $\frac{1230}{900}$ D. $\frac{25}{12}$

(0,5p) **2.** Forma zecimală a fracţiei $\frac{37}{20}$ este:

A. 0,85 B. 1,85 C. 2,15 D. 0,185

(0,5p) **3.** Dacă $a = \sqrt{30^2 - 24^2}$, atunci valoarea lui a este:

A. 16 B. 18 C. 6 D. 12

(0,5p) **4.** Se consideră mulţimea:

$$A = \left\{\sqrt{0,(8)};\ \frac{-21}{-7};\ \sqrt{2,25};\ \sqrt{6\frac{1}{4}};\ -\frac{14}{2};\ \sqrt{3\frac{1}{9}};\ (-2)^3\right\}.$$

Cardinalul mulţimii $A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ este:

A. 4 B. 5 C. 3 D. 6

III. Scrieţi rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Arătaţi că numărul $a = \sqrt{288^2 - 285 \cdot 288 - 135}$ este număr raţional.

(1p) **2.** Calculați $A \cap B$, unde $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{15}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{4x+23}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(1p) **3.** Determinați $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{52-14\sqrt{3}}}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(1p) **4.** Determinați cifrele a și b, cu $a < b$, pentru care $\sqrt{0,a(b) + 0,b(a)} \in \mathbb{Q}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

- **C₁.** Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- **C₂.** Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- **C₃.** Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- **C₄.** Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
- **C₅.** Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
- **C₆.** Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

A. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere

Definiţie. Se numeşte **expresie algebrică** o succesiune de numere şi/sau litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere).

Exemple: 7, x, $7x$, $7\sqrt{3}x$, $7\sqrt{3}x-8y^2$.

Observaţii:

a) **Cea mai simplă** expresie algebrică obţinută doar prin înmulţire cu numere şi/sau litere se numeşte **termen** al expresiei algebrice.

Exemple: 7, x, xy, $8z^2y^3$.

b) **Numărul** care apare în scrierea unui termen al unei expresii algebrice se numeşte **coeficientul** termenului.

Exemple: $-7xy^2$ are coeficientul -7, $18\sqrt{3}x^2z$ are coeficientul $18\sqrt{3}$, $-0,(7)zt^2$ are coeficientul $-0,(7)$.

c) **Literele** care intră în scrierea unui termen alcătuiesc **partea literală** a sa.
Exemple: $-81x$ are partea literală x, $-8x^2y^3z$ are partea literală x^2y^3z.

d) Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleaşi **operaţii** care se efectuează cu numerele reale: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere. Aceste operaţii au **aceleaşi proprietăţi** pe care le au operaţiile cu numere reale.

PE-PP **1.** Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Definiţie. Se numesc **termeni asemenea** acei termeni care conţin aceeaşi succesiune de litere la aceiaşi exponenţi.

Exemple: a) $-3x+9+6x$, termenii asemenea sunt $-3x$ şi $6x$;

b) $7\sqrt{5}+11a-7x^3z+2\sqrt{5}+\frac{3}{5}x^3z$, termenii asemenea sunt $7\sqrt{5}$ şi $2\sqrt{5}$, respectiv $-7x^3z$ şi $\frac{3}{5}x^3z$.

Observaţii:

a) **Adunarea sau scăderea** a doi termeni asemenea este operaţia prin care se obţine un termen asemenea cu cei iniţiali, iar coeficientul noului termen se obţine efectuând operaţiile algebrice indicate asupra celor doi coeficienţi ai termenilor iniţiali.

b) **Operaţiile** de adunare şi scădere efectuate cu **termeni asemenea** se numesc operaţii de **reducere** a termenilor asemenea.

Exemple: i) $7x+5x=12x$; ii) $-7xy+2xy=-5xy$; iii) $-3x^2-8x^2=-11x^2$.

c) O **expresie algebrică** este considerată a fi scrisă în **forma canonică** dacă nu conţine termeni asemenea.

d) **Produsul** dintre un număr real şi o expresie algebrică se efectuează înmulţind acest număr cu fiecare coeficient al termenilor ce compun expresia algebrică, cu respectarea regulilor de calcul cu numere reale.

Exemplu: $3(2x^2-5x+5)-(4x^2+3x+3y)-4(x+y)=6x^2-15x+15-4x^2-3x-3y-$ $-4x-4y=2x^2-22x-7y+15$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Efectuaţi:

a) $4x-3x+5x$; b) $7x^2-3x^2+3x^2$; c) $2ab-5ab$;
d) $9x^2-11x^2-9x^2$; e) $-4{,}2y-1{,}8y$; f) $0{,}3a-0{,}7a$;
g) $\frac{2}{7}a^2-\frac{3}{7}a^2-\frac{a^2}{7}$; h) $\sqrt{3}x-2\sqrt{3}x$; i) $2\sqrt{5}xy-7\sqrt{5}xy$;
j) $8abc-11abc$; k) $y^2+13y^2-5y^2$; l) $4x^2y^2-7x^2y^2+3x^2y^2$.

2. Reduceţi termenii asemenea:

a) $7x+2y-4z-5x+6y+3z$; b) $3a-9b+2a+7b-4a-5b$;
c) $8x-3y-5z-9x-4y+3z$; d) $13x^2-2x+4x^2-11x-15x^2+13x$;
e) $17xy-21x^2y-12xy+23x^2y-2x^2y$; f) $7x-9-11x+12+4x$.

3. Scrieţi în spaţiul punctat termenul corespunzător obţinerii unei propoziţii adevărate:

a) $18x-16x+ ... +5x=24x$; b) $16x-23x+ ... +6x=18x$;
c) $10a+14a- ... +12a=15a$; d) $4x^2-5x^2+ ... +18x^2=0$;
e) $11xy-7xy+ ... -8xy=21xy$.

4. Scrieți în spațiul punctat termenii corespunzători obținerii unei propoziții adevărate:

a) $3x^2 - 9a + 7x^2 + ... = 12a + 5x^2$; b) $7xy + 9x^2 - 3x + ... + xy - 4x^2 = 2x^2 + 5xy$;
c) $4x + 18x - 13 + ... = -6x$; d) $4x - 7xy^2 - 9x + 5xy^2 + ... = 0$.

5. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $(2x^2 - 7x) + (6x - 3x^2)$; b) $(2a - 5b) + (-6a + 3b)$;
c) $(x^2 + x + 3) - (2x^2 + x - 5)$; d) $(6x^2 - 3x + 4) - (4x^2 - 3x + 5)$;
e) $(4x - 3a) + (5x + 6a) - (8x - 5a)$; f) $(4a + 3b - 5) - (2a + 3b) + (a + 5)$.

PE Aplicare și exersare **

6. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $-13x - 15y + 9x - (19x + 3y - 12x) + 7y$;
b) $(5x - 8y) - (11x + 3y) - (-13x - 5y)$;
c) $(4x^2 - 3y + 2x) - (4x + 6y - 5x^2) - (9x^2 - 7y - 3x)$;
d) $(3a + 4b - 2c) + (-5a - 6b + 4c) - (4a - 7b - 5c)$;
e) $(5x - 3a + 2b) - (4x - 5a + 6b) - (7a - 6x - 5b)$.

7. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3a - 4b) - 3(a - 2b) + 4(-2a + 3b)$;
b) $4(3x + 2y) - 5(2x - 3y) + 3(-4x - 5y)$;
c) $-3(x^2 - 2) + 6(x^2 - 1) - 4(x^2 + 3) + 2(x^2 - 4)$;
d) $3(5x - 2y) - 5(2x + y) + 2(-3x - 4y) - 4(-x - 3y)$;
e) $3(4a + 5b) - 5(2a + 3b) - 4(3a + 4b) + 2(-a - 2b)$.

8. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3a + 9b - 7c) - 3(4a + 5b + 9c) - 5(a + 2b - 8c)$;
b) $4(2x^2 - 3x + 4) - 3(3x^2 - 4x - 2) + 2(x^2 - 2x - 10)$;
c) $5(3x^2 - 5x + 6) - 4(5x^2 - 6x + 7) - 3(-x^2 + 2x - 2)$;
d) $6(-x^2 - 3x + 5) - 7(2x^2 - 4x + 6) + 5(5x^2 + 2x - 1)$.

9. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3x^2 - 2x - 5) - 3(4x^2 - 2x - 7) - 4(2x^2 + x + 3)$;
b) $3(2x^2 - x + 4) - 4(3x^2 - 2x + 5) - 2(x^2 + 7x - 3)$;
c) $2(6x^2 - 5x + 4) - 3(4x^2 - 3x + 5) - 4(2x^2 + 3x - 4)$.

10. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $3(4x - 3y + 2z) - 2(3x - 2y - 3z) - 4(x + 3y + 2z)$;
b) $2(3x - 2y - 5z) - 3(4x - 2y - 7z) - 4(2x + 3y + 3z)$;
c) $4(5x - 6y + 3z) - 3(6x - 5y + 4z) - 2(3x + 4y - 5z)$.

11. Efectuați:

a) $8\sqrt{3}a + 12\sqrt{3}a + 3\sqrt{3}a - 15\sqrt{3}a - 25\sqrt{3}a$;
b) $9\sqrt{2}x + 13\sqrt{2}x - 18\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}x$;
c) $4\sqrt{5}xy - 7\sqrt{5}xy + 14\sqrt{5}xy - 9\sqrt{5}xy + 2\sqrt{5}xy$;
d) $5\sqrt{6}x^2y - 14\sqrt{6}x^2y + 19\sqrt{6}x^2y - 23\sqrt{6}x^2y + 8\sqrt{6}x^2y$.

12. Reduceți termenii asemenea:

a) $5\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{2}x^2 - 3\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{2}x^2$; b) $\sqrt{3}a + \sqrt{27}a - 5\sqrt{2}b + \sqrt{8}b + \sqrt{72}b$;
c) $\sqrt{12}x^2 - \sqrt{32}a^2 - 4\sqrt{3}x^2 + \sqrt{50}a^2$; d) $\left(\sqrt{2} + 1\right)x - \sqrt{8}x - 3x - \left(\sqrt{2} + 4\right)x$.

21. Se consideră expresiile: $A = 3x - 2 + a^2$, $B = 6 + 5x - 8a^2$ şi $C = 13 - 11x + 3a^2$. Calculaţi:

a) $A + B - C$; b) $A - B + 2C$; c) $A + B + C$;
d) $2A + (2B - 3C)$; e) $-2A + (3B - C)$; f) $(2A - 3B) + (2B - 3C)$.

22. Dacă $4x + 5y = 21$ şi $5x + 4y = 15$, calculaţi:

a) $8x + 8y$; b) $4x - 4y$; c) $10x + 8y$;
d) $8x + 10y$; e) $2x + 7y$; f) $-7x - 2y$.

23. a) Determinaţi valorile lui a pentru care numărul A să fie natural, unde:

$$A = a\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} + a\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2} - a\sqrt{\left(2\sqrt{3}-4\right)^2}.$$

b) Se consideră numărul $n = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}a - \frac{6}{\sqrt{3}}a\right) - 6\left(\frac{2}{\sqrt{18}}a - \frac{15}{2\sqrt{75}}a\right)$, $a \neq 0$. Determinaţi a, astfel încât n să fie cel mai mic număr natural posibil.

c) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{2a+b-8} + \sqrt{a-2\sqrt{2}} = 0$. Arătaţi că numărul:

$E = 6a + 3b - 8$ este un pătrat perfect.

PE-PP **Supermate ******

24. Determinaţi numerele raţionale a şi b, astfel încât $\sqrt{3}a + 2a - 2\sqrt{3}b - 2b = -1$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{2a+3b-17} + \sqrt{2a-8} + \sqrt{5a-2b+7c} = 0$. Calculaţi valoarea expresiei $E = (3a + 5b + 14c)^{2019}$.

26. Se dă $E(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\}$. Dacă a şi b sunt două numere raţionale pentru care $E(a) \cdot (5a+7) + b\sqrt{3} = \sqrt{3}$, calculaţi valoarea lui $n = (16a + 23b)^{2k+1}$, unde $k \in \mathbb{N}$.

27. Dacă a şi b sunt două numere întregi pentru care $\frac{a}{2-\sqrt{3}} + \frac{b}{2+\sqrt{3}} = 6 - \sqrt{3}$, arătaţi că numărul $p = \frac{5a-3b}{3a-2b}$ este număr natural.

PE-PP 2. Înmulţirea şi împărţirea numerelor reale reprezentate prin litere

• Prin **înmulţirea** a doi termeni ai unei expresii algebrice, **nu neapărat asemenea**, obţinem un nou termen ce are: **coeficientul** egal cu produsul coeficienţilor celor doi termeni, **partea literală** formată din fiecare literă a celor doi termeni, luată o singură dată, iar ca **exponent** fiecare literă are **suma** exponenţilor pe care i-a avut în termenii daţi.

Exemple: $7x \cdot (-3xy) = -21x^2y$; $(-4xyz) \cdot (-6x^2yz^3) = 24x^3y^2z^4$.

• Prin **împărţirea** a doi termeni ai unei expresii algebrice, **nu neapărat asemenea**, obţinem un nou termen ce are: **coeficientul** egal cu câtul coeficienţilor celor doi termeni, **partea literală** formată din fiecare literă a celor doi termeni, luată o singură dată, iar ca **exponent** fiecare literă are **diferenţa** exponenţilor pe care i-a avut în termenii daţi.

Exemple: $39x^2 : 13x = 3x$; $(-21xy^3z) : (7xy) = -3y^2z$.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Calculaţi:

a) $6x + 11y - 10x - 8y + 9x - 7y$;
b) $(-16x^3)^5 : (+8x^2)^6$;
c) $(3x - 5)(2x + 3)$;
d) $4x + 5y - (6x - 7y) - (5x + 6y)$;
e) $3(x^2 - 2xy - y^2) + 2(x^2 + 3xy + 2y^2) - (5x^2 + y^2)$.

2. Calculaţi, respectând ordinea efectuării operaţiilor:

a) $(4x + 3)(2x - 5) - (2x - 3)(3x + 7)$;
b) $(x - 2)(x^2 - 3x + 4) - (2 - x^2)(2 - 3x) + (x + 3)(4x - 3)$;
c) $(3x + 1)[(36x^4 - 48x^3) : (+12x^3) - 2(x - 1)] - 3x^2$.

3. Dacă $3x - 2y = 4$, calculaţi valoarea numărului $n = (6x - 4y) + (6x - 4y)^2 + (6x - 4y)^3$.

4. Arătaţi că numărul $n = 6x^2 - 9x + 7 - x(4x - 6y + 3) + 2(6x - 3xy - 2)$ este pozitiv, oricare ar fi x real.

5. a) Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E = 7 - 3x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E = 2x^2 - 9$, unde $x \in \mathbb{R}$.

6. a) Calculaţi perimetrul unui pătrat a cărui arie este egală cu $16a^4b^2c^6$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi aria unui pătrat al cărui perimetru este egal cu $32ab^3c^2$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

TESTUL 2

1. Calculaţi:

a) $10a - 12b - 7a + 9b - 5a + 8b$;
b) $(-32x^4)^5 : (-16x^3)^6$;
c) $(2x - 7)(3x + 4)$;
d) $\left(-6\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\right)x - \left(7\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right)x$;
e) $a\sqrt{\left(\sqrt{2} - 2\right)^2} + a\sqrt{\left(2\sqrt{2} - 3\right)^2} - 3a\sqrt{\left(\sqrt{2} - 3\right)^2}$.

2. Calculaţi, respectând ordinea efectuării operaţiilor:

a) $(2x + 5)(4x - 3) - (3x - 7)(2x + 3)$;
b) $(x - 3)(x^2 - 2x + 3) - (-x^2)(2 - 3x) + x(3x^2 + 5)$;
c) $\{2x^3 + x^3[5x - 2(x + 1)]\} : \left(-\sqrt{3}x^2\right)^2$.

3. Dacă $2a + 3b = 6$, calculaţi valoarea numărului $n = (4a + 6b)^{-1} + (4a + 6b)^{-2} + (4a + 6b)^{-3}$.

4. Arătaţi că numărul $a = 7x^2 - 8x + 6 - x(5x - 4y + 2) + 2(5x - 2xy + 1)$ este pozitiv, oricare ar fi numărul real x.

5. a) Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E = 5 - 2x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E = 3x^2 - 8$, unde $x \in \mathbb{R}$.

6. a) Calculaţi perimetrul unui pătrat a cărui arie este egală cu $25a^2b^2c^4$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi aria unui pătrat al cărui perimetru este egal cu $24ab^2c^3$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Geometrie

Capitolul I
Elemente ale geometriei în spaţiu

PP **Competenţe specifice**

- C1. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configuraţii spaţiale date
- C2. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configuraţii spaţiale date
- C3. Folosirea unor proprietăţi de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea poziţiilor relative ale dreptelor şi planelor
- C4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configuraţii geometrice
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configuraţii spaţiale şi a calculării unor elemente metrice
- C6. Modelarea unor situaţii practice în limbaj geometric, utilizând configuraţii spaţiale

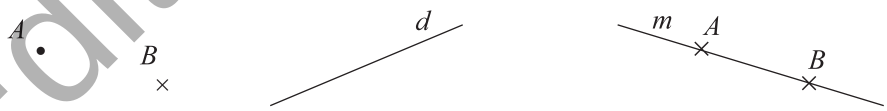
PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

Punctul, **dreapta** şi **planul** fac parte din noţiunile de bază ale geometriei în spaţiu. Ele sunt noţiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

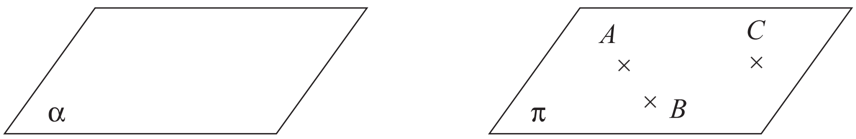
Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuţit de foaia de scris: •, ×. Se notează cu litere mari: A, B, C, … .

Dreapta. Este formată din puncte şi se reprezintă printr-un fir de aţă foarte subţire întins la nesfârşit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: a, b, d, … .

Dacă punctele A şi B sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu AB.

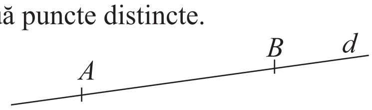


Planul. Poate fi asemănat cu suprafaţa liniştită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârşit în toate direcţiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: α, β, γ, π, … . Un plan care conţine trei puncte necoliniare A, B şi C se notează prin (ABC). Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

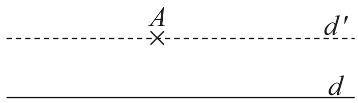


Propoziţii despre puncte, drepte şi plane

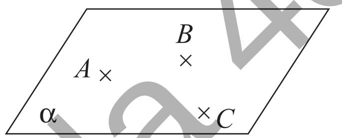
P₁. (**Axioma dreptei**) Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una. Orice dreaptă are cel puţin două puncte distincte.



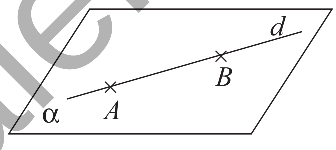
P₂. (**Axioma paralelelor** sau **postulatul lui Euclid**) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă.



P₃. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan şi numai unul care să le conţină. Orice plan conţine cel puţin trei puncte necoliniare.

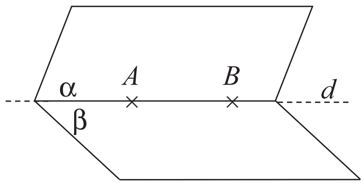


P₄. Dacă două puncte distincte aparţin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

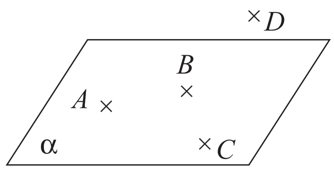


P₅. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puţin încă un punct comun.

Consecinţă: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



P₆. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan (acestea se numesc **necoplanare**).



● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) Trei puncte necoliniare determină un …………….. .

b) Prin două puncte distincte trece o …………….. şi numai una.

c) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o …………….. comună.

d) Patru puncte necoplanare determină un număr de …………….. drepte.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziţii:

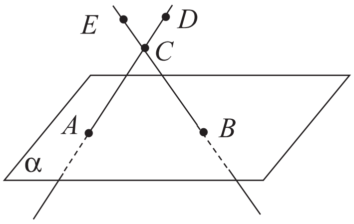
a) Oricare trei puncte sunt coplanare.

b) Patru puncte coliniare sunt coplanare.

c) Dacă două plane au două puncte comune, atunci ele au o dreaptă comună.

d) Patru puncte, dintre care oricare trei sunt coliniare, determină o dreaptă.

3. Scrieţi toate dreptele determinate de punctele date în figura de mai jos.



PE Aplicare şi exersare **

4. Fiind date patru puncte A, B, C şi D, stabiliţi câte drepte distincte se pot obţine unindu-le două câte două în fiecare dintre situaţiile:

a) oricare trei dintre puncte sunt necoliniare;

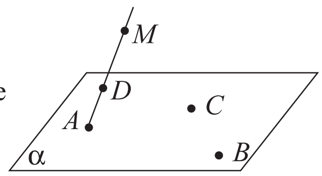
b) trei dintre puncte sunt coliniare;

c) punctele sunt necoplanare.

5. a) Câtor drepte poate să aparţină un punct dat?

b) Câtor plane pot să aparţină două puncte distincte date?

6. În figura alăturată, punctele distincte A, B, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$, $M \notin \alpha$, iar $D \in AM$.



a) Stabiliţi câte drepte distincte se pot obţine unind punctele două câte două.

b) Stabiliţi dreptele de intersecţie a planelor (MAB), (DBC) şi (MAC) cu planul α.

c) Stabiliţi dreapta de intersecţie a planelor (BDC) şi (MAC).

PE Aprofundare şi performanţă ***

7. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D, oricare trei dintre ele fiind necoliniare.

a) Determinaţi câte drepte se pot obţine unindu-le două câte două.

b) Dacă $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 84$ cm^2, d$(A, BC) = 14$ cm şi d$(D, BC) = 15$ cm, calculaţi $\mathcal{A}_{\Delta BCD}$.

8. Fie triunghiul echilateral ABC de latură 24 cm şi M un punct ce nu aparţine planului (ABC), astfel încât $MA = MB = MC = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculaţi aria triunghiului MAD.

b) Dacă $MN \perp AD$, $N \in AD$, calculaţi lungimea segmentului MN.

9. Fie triunghiul echilateral ABC şi M un punct exterior planului (ABC), astfel încât $MA = 6$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{3}$ cm şi $MD = 6\sqrt{2}$ cm, unde $D \in BC$ şi $BD \equiv DC$. Stabiliţi natura triunghiului MAD şi calculaţi aria sa.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = 12$ cm şi M un punct nesituat în planul pătratului, astfel încât $MA = 12$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{10}$ cm. Ştiind că $N \in BC$, astfel încât $BN \equiv NC$, stabiliţi natura triunghiului MAN şi aflaţi aria acestuia.

11. Punctele M, A, B şi C sunt patru puncte necoplanare, $M \notin (ABC)$. Se ştie că $AB = AC = 26$ cm, $MB = MC = 8\sqrt{10}$ cm, $MA = 6$ cm şi $BC = 48$ cm. Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculaţi aria triunghiului MAD.

PE-PP **Supermate ******

12. Într-un plan sunt date cinci puncte distincte A, B, C, D, E, iar în afara planului este situat un punct P.

a) Care este cel mai mic număr de drepte care să treacă prin cel puţin două dintre aceste puncte?

b) Dar cel mai mare număr?

13. Fie A, B, C trei puncte distincte într-un plan α, iar D şi E două puncte distincte în afara planului.

a) Care este numărul minim de drepte determinate de câte două dintre aceste puncte?

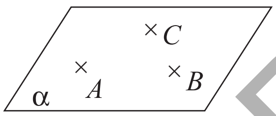
b) Dar numărul maxim?

14. Cinci puncte distincte situate într-un plan şi un punct exterior acestui plan pot determina nouă drepte?

PE-PP 2. Determinarea planului

1. Trei puncte necoliniare determină un plan (fig. 1).

2. O dreaptă şi un punct care nu-i aparţine determină un plan (fig. 2).

Fig. 1


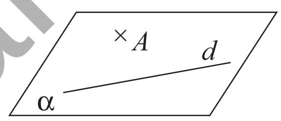
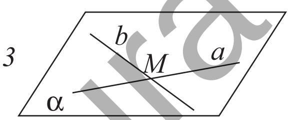


Fig. 2

3. Două drepte concurente determină un plan (fig. 3).

4. Două drepte paralele determină un plan (fig. 4).

Fig. 3


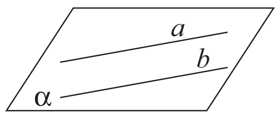


Fig. 4

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE **Înţelegere ***

1. Enumeraţi planele determinate de patru puncte necoplanare A, B, C şi D.

2. Fie un triunghi oarecare ABC şi D mijlocul laturii BC. Se consideră un punct E, nesituat în planul (ABC). Precizaţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propoziţiile următoare:

a) Punctul D aparţine planului (BCE).

b) Planele (BCE) şi (CED) coincid.

c) Punctul A aparţine planului (BCE).

3. În Piaţa San Marco din Veneţia, trei porumbei ciugulesc de pe caldarâm grăunţele aruncate de un turist. Speriaţi de un zgomot, porumbeii îşi iau zborul în direcţii diferite. După cât timp se vor regăsi situaţi într-un acelaşi plan?

9. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $AB = 6$ cm.

a) Arătaţi că $(D'OD) \perp (D'AC)$, unde $AC \cap BD = \{O\}$.

b) Arătaţi că $(D'AB) \perp (A'DC)$.

c) Calculaţi distanţa de la D la planul $(D'AC)$.

10. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, iar M şi N mijloacele muchiilor BC şi AD. Arătaţi că:

a) $BC \perp (AMD)$; b) $(AMD) \perp (DBC)$; c) $(AMD) \perp (BNC)$.

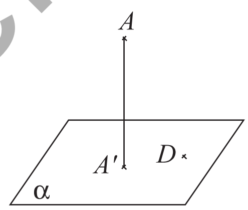
PE-PP **Supermate ******

11. Fie $ABCD$ un tetraedru în care triunghiurile ABC şi ABD sunt echilaterale şi situate în plane perpendiculare. Se notează cu M mijlocul laturii AB.

a) Arătaţi că $(CMD) \perp (ABD)$ şi $(CMD) \perp (ABC)$.

b) Dacă $AB = 8$ cm, calculaţi aria triunghiului CMD.

PE-PP 11. Proiecţii de puncte, de segmente şi de drepte pe un plan



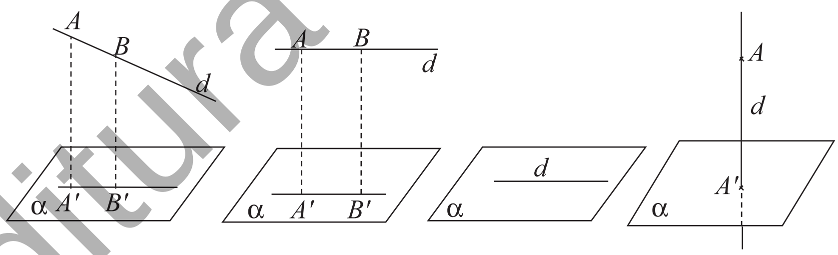
Definiţie. Proiecţia ortogonală a unui punct $A \notin \alpha$ pe un plan α este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.

Se notează $pr_\alpha A = A'$.

Dacă $D \in \alpha$, atunci proiecţia punctului D pe planul α este chiar punctul D.

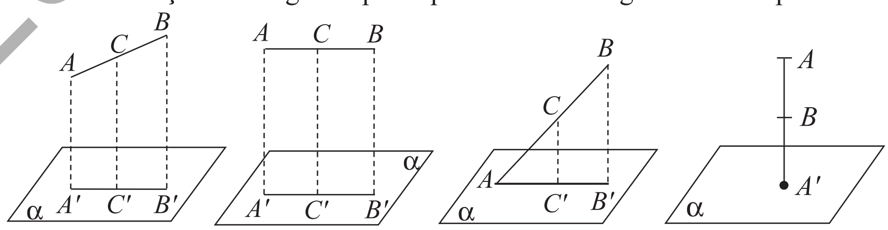
Definiţie. Proiecţia unei figuri geometrice $\mathscr{F}$ pe un plan este mulţimea formată din proiecţiile tuturor punctelor figurii $\mathscr{F}$ pe acel plan.

Definiţie. Proiecţia unei drepte d pe un plan α este o dreaptă (dacă d nu este perpendiculară pe α) sau un punct (dacă $d \perp \alpha$).



$d \nparallel \alpha$ $d \parallel \alpha$ $d \subset \alpha$ $d \perp \alpha$

Teoremă: Proiecţia unui segment pe un plan α este un segment sau un punct.



Dacă $pr_\alpha A = A'$ şi $pr_\alpha B = B'$, atunci $pr_\alpha AB = A'B'$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, stabiliţi:

a) $\text{pr}_{(ABC)}\,A'$; b) $\text{pr}_{(ABD)}\,C'$; c) $\text{pr}_{(BCC')}\,A$;
d) $\text{pr}_{(BDD')}\,A$; e) $\text{pr}_{(ACC')}\,D'$; f) $\text{pr}_{(ACC')}\,D$.

2. În vârful A al pătratului $ABCD$ se ridică, pe planul acestuia, perpendiculara AM. Determinaţi:

a) $\text{pr}_{(ABC)}\,M$; b) $\text{pr}_{(ABM)}\,C$; c) $\text{pr}_{(ADM)}\,B$;
d) $\text{pr}_{(ABC)}\,MD$; e) $\text{pr}_{(MAD)}\,CM$; f) $\text{pr}_{(ABC)}\,MC$.

3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, în care $\{O\} = AC \cap BD$, iar punctul M este mijlocul muchiei CD. Determinaţi:

a) $\text{pr}_{(ABC)}\,V$; b) $\text{pr}_{(ABC)}\,VB$; c) $\text{pr}_{(VBD)}\,C$;
d) $\text{pr}_{(VOC)}\,A$; e) $\text{pr}_{(VOB)}\,CD$; f) $\text{pr}_{(VCD)}\,M$;
g) $\text{pr}_{(ABC)}\,VO$; h) $\text{pr}_{(ABC)}\,VM$; i) $\text{pr}_{(ADC)}\,\Delta VBC$.

PE Aplicare şi exersare **

4. Un segment AB se proiectează pe un plan α după segmentul $A'B'$. Dacă $AB = 20$ cm, $AA' = 10$ cm şi $BB' = 22$ cm, aflaţi lungimea proiecţiei $A'B'$.

5. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată şi $M \in BC$, astfel încât $BM \equiv MC$ şi $VM = AB = 18$ cm.

a) Dacă $VO \perp (ABC)$, calculaţi lungimea segmentului VO.
b) Calculaţi aria triunghiului VAC.
c) Calculaţi suma proiecţiilor muchiilor VA, VB, VC şi VD pe planul (ABC).

6. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia egală cu 12 cm, se consideră punctele $M \in B'C'$ şi $N \in AD$, astfel încât $\dfrac{B'M}{MC'} = 1$ şi $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{1}{2}$. Aflaţi ariile proiecţiilor triunghiurilor $C'MN$ şi, respectiv, $A'MN$ pe planul (ABC).

PE Aprofundare şi performanţă ***

7. Triunghiul isoscel ABC, $AB = AC = 15$ cm şi $BC = 12\sqrt{3}$ cm, are latura BC inclusă în planul α. Proiecţia punctului A pe planul α este punctul $D \notin BC$. Dacă $BD = 12$ cm, aflaţi lungimea segmentului AD şi aria proiecţiei triunghiului ABC pe planul α.

8. Triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$, are vârful A situat în planul α şi $BC \parallel \alpha$. Dacă $B'C' = \text{pr}_{\alpha}\,BC$, arătaţi că:

a) patrulaterul $BCC'B'$ este dreptunghi; b) triunghiul $AB'C'$ este isoscel.

9. În vârful A al trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ şi $AB > CD$, se ridică perpendiculara AE pe planul trapezului. Se consideră punctele $F \in AB$ şi $G \in BE$, astfel încât $CF \perp AB$ şi $CG \perp EB$. Aflaţi $\text{pr}_{(CGF)}\,BE$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura de 12 cm şi un punct $M \notin (ABC)$, astfel încât $MA \equiv MB \equiv MC$ şi $MA \perp MB \perp MC \perp MA$. Ştiind că M' este proiecţia punctului M pe planul (ABC), calculaţi MM'.

PE-PP **Supermate** ****

11. Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei egală cu 12 cm şi înălţimea $VO = 6$ cm. Dacă *M*, *N*, *P* şi *Q* sunt proiecţiile punctului *O* pe planele (*VAB*), (*VBC*), (*VDC*) şi, respectiv, (*VAD*), stabiliţi poziţia planului (*MNP*) faţă de planul bazei şi calculaţi aria patrulaterului *MNPQ*.

12. Fie *ABCD* un pătrat de latură $AB = 20$ cm. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $MA = 15$ cm şi se notează cu *N* şi *P* proiecţiile punctului *A* pe planele (*MDC*) şi, respectiv, (*MBC*).

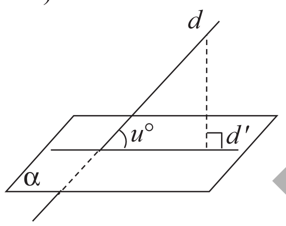
a) Stabiliţi poziţia dreptei *NP* faţă de planul (*ABC*).

b) Calculaţi aria triunghiului *MBD*.

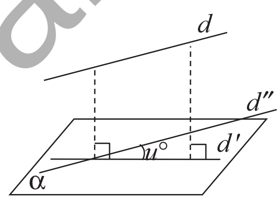
c) Ce procent reprezintă aria trapezului *BDNP* din aria triunghiului *MBD*?

PE-PP 12. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan. Lungimea proiecţiei unui segment

Definiţie. Numim unghiul unei drepte cu un plan unghiul format de acea dreaptă cu proiecţia ei pe plan (în cazul în care dreapta nu este nici perpendiculară pe plan, nici paralelă cu el).



Dacă $d' = \text{pr}_\alpha\, d \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d') = u°$.



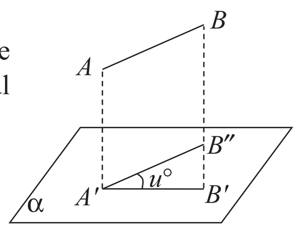
Dacă $d' = \text{pr}_\alpha\, d$ şi $d'' \parallel d \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d'', d') = u°$.

Observaţii:

- Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, vom considera măsura unghiului format de aceasta cu planul egală cu 90°.
- Dacă dreapta este paralelă cu planul, vom considera măsura unghiului format de aceasta cu planul egală cu 0°.
- Măsura unghiului unei drepte cu un plan este cuprinsă între 0° şi 90°.

Teoremă: Lungimea proiecţiei unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea segmentului şi cosinusul unghiului dintre dreapta suport a segmentului şi planul respectiv.

$$A'B' = AB \cdot \cos u$$



PE

Nume ______________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi propoziţii adevărate. (3 puncte)

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 8$ cm.

(0,3p) a) Unghiul dintre $C'O$ şi planul (BCC'), unde $AC \cap BD = \{O\}$, este de .... °.

(0,3p) b) Unghiul dintre AC şi planul (ADD') are .... °.

(0,4p) c) Tangenta unghiului dintre $A'C$ şi planul (ABC) este ....

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 12$ cm.

(0,3p) a) Unghiul dintre muchia VB şi planul (ABC) are .... °.

(0,3p) b) Unghiul dintre muchia VA şi planul (VBD) are .... °.

(0,4p) c) Unghiul dintre muchia AB şi planul (VBD) are .... °.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = AA' =$ $= 12$ cm şi $BC = 12\sqrt{2}$ cm.

(0,3p) a) Unghiul dintre BD' şi planul (ADD') este de .... °.

(0,3p) b) Unghiul dintre BD' şi planul (ABC) este de .... °.

(0,4p) c) Sinusul unghiului dintre AD' şi planul (DCC') este de ....

II. Încercuiţi răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Fie un segment AB şi un plan α. Dacă $AB = 100$ cm, atunci lungimea maximă a proiecţiei segmentului AB pe planul α este:

A. 0 cm B. 100 cm C. 50 cm D. 200 cm

(0,5p) **2.** Fie un segment AB şi un plan α. Dacă $pr_{\alpha} AB = 16$ cm, atunci lungimea minimă a segmentului AB este:

A. 16 cm B. 0 cm C. 32 cm D. nu se poate

(0,5p) **3.** Fie un segment $AB = 20$ cm, care se proiectează pe un plan α. Dacă $pr_{\alpha} AB = 10$ cm, atunci $\sphericalangle(AB, \alpha)$ este:

A. 0° B. 60° C. 30° D. 90°

(0,5p) **4.** Fie un segment $AB = 100$ cm, care se proiectează pe un plan α. Dacă $\sphericalangle(AB, \alpha) =$ $= 90°$, atunci $pr_{\alpha} AB$ este:

A. 0 cm B. 100 cm C. 50 cm D. $50\sqrt{2}$ cm

III. Scrieţi rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia $AB = 6$ cm. Calculaţi lungimea proiecţiei segmentului AC' pe planul (BCC').

(1p) **2.** Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază triunghiul echilateral ABC cu $AB = 8$ cm, iar $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Aflaţi măsura unghiului format de dreapta $A'C$ cu planul bazei.

(1p) **3.** În piramida regulată $SABC$, latura bazei este $AB = 6$ cm, iar unghiul format de muchia laterală cu planul bazei este de 60°. Aflaţi înălţimea piramidei.

(1p) **4.** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, cu muchia laterală $VA = 18$ cm şi măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei de 45°. Calculaţi:
a) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);
b) măsura unghiului format de latura BC cu planul (VAC).

Subiectul	I.1	I.2	I.3	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul											
Nota											

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

✺ TESTUL 1 ✺

1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată, cu muchia laterală $VA = 6$ cm şi raza cercului circumscris bazei egală cu $3\sqrt{2}$ cm.

a) Calculaţi latura bazei şi înălţimea piramidei.

b) Arătaţi că, dacă $D \in BC$ şi $BD \equiv DC$, atunci $(VAD) \perp (ABC)$ şi $(VAD) \perp (VBC)$.

c) Calculaţi măsura unghiului format de muchia VA cu planul bazei.

d) Calculaţi sinusul unghiului format de muchia VB cu planul (VAD).

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm şi $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:

a) măsura unghiului format de dreapta BD' cu planul $(D'AD)$;

b) măsura unghiului format de dreapta BD cu planul (ABB');

c) măsura unghiului diedru format de planele $(D'BD)$ şi (ABB');

d) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AB)$ şi (ABC).

✺ TESTUL 2 ✺

1. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral cu latura $AB = 16$ cm şi $AA' = 8$ cm.

a) Stabiliţi natura triunghiului $A'BC$ şi calculaţi aria acestuia.

b) Dacă D este mijlocul laturii BC, arătaţi că planele $(A'AD)$ şi (BCC') sunt perpendiculare.

c) Calculaţi tangenta unghiului format de $A'C$ cu planul $(A'AD)$.

d) Calculaţi măsura unghiului diedru format de planele $(A'BC)$ şi (ABC).

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $AB = VA = 6\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:

a) măsura unghiului format de muchia VA cu planul bazei;

b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);

c) măsura unghiului format de muchia BC cu planul (VAC);

d) tangenta unghiului diedru format de planele (VBC) şi (ABC).

PE-PP Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

✹ TESTUL 1 ✹

A. Se scriu doar răspunsurile.

(0,5p) **1.** a) Rezultatul calculului $-3^0 + \sqrt{72} : \sqrt{18}$ este ....

(0,5p) b) Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3; 2] \cap (-5; 0)$ este egal cu ....

(0,5p) c) Media geometrică a numerelor 0,12 şi 0,(3) este ....

(0,5p) **2.** a) Rezultatul calculului $(x-3)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x-1)$ este egal cu ....

(0,5p) b) Scrisă sub formă de interval, mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \le 3\}$ este $A =$ ....

(0,5p) c) Descompunerea în factori ireductibili a expresiei $(4x-5)^2 - 9x^2$ este ....

(0,5p) **3.** a) Cel mai mic număr natural, pentru care $\frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}$, este egal cu ....

(0,5p) b) Valoarea numărului $a = |x+3| + |x-7|$, pentru $x \in [-3; 7]$, este ....

(0,5p) c) Efectuând $(-5; 3] \cup [-3; 5)$, se obţine intervalul ....

4. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu latura bazei $AB = 6$ cm şi $AA' = 6\sqrt{3}$ cm.

(0,5p) a) Lungimea segmentului AD' este de .... cm.

(0,5p) b) Măsura unghiului format de AD' cu planul (ABC) este de ....°.

(0,5p) c) Măsura unghiului format de AD' cu BB' este de ....°.

B. Se scriu rezolvările complete.

(0,5p) **5.** a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia: $\frac{3x-2}{7} - \frac{2x-5}{5} > \frac{46-20x}{35}$.

(0,5p) b) Stabiliţi cărui interval aparţin numerele reale a, b şi c, pentru care avem relaţia: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - 2b - 3c) = 11$.

(0,5p) c) Fie mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -7 < \frac{6x+10}{2} < 20\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{2x+1}{3}\right| \le 3\right\}$.

Determinaţi mulţimile $A \cap B$ şi $A \cup B$.

6. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată care are $AB = 10$ cm şi $SO = 5\sqrt{2}$ cm, unde $SO \perp (ABC)$.

(0,25p) a) Calculaţi măsura unghiului format de SA cu planul (SBD).

(0,25p) b) Calculaţi distanţa de la O la planul (SBC).

(0,5p) c) Dacă M este mijlocul laturii BC şi N este mijlocul muchiei SC, arătaţi că $(OMN) \parallel (SAB)$.

(0,5p) d) Calculaţi măsura unghiului dintre dreptele MN şi BD.

PE-PP Probleme pentru pregătirea olimpiadei şi a concursurilor şcolare

ALGEBRĂ

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât numărul:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

să aparţină mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| < \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$.

2. Determinaţi $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a} + \dfrac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b} \in \mathbb{Z}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstraţi că:

a) $\sqrt{a^4+4b^2} + \sqrt{b^4+4a^2} = 2$; b) $-\sqrt{2} \le a+b \le \sqrt{2}$.

4. a) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$. Atunci $a = c$ şi $b = d$.

b) Arătaţi că nu există numerele raţionale a, b, c, d, astfel încât:

$$1+\sqrt{3} = \left(a+b\sqrt{3}\right)^2 + \left(c+d\sqrt{3}\right)^2.$$

5. Demonstraţi că, oricare ar fi numerele raţionale x, y, z, diferite două câte două, numărul $n \in \mathbb{Q}$, unde $n = \sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2} + \dfrac{1}{(y-z)^2} + \dfrac{1}{(z-x)^2}}$.

6. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a = \sqrt{4n^2+20n+65}$ să fie număr natural.

7. Demonstraţi că, dacă numerele întregi x, y, z verifică relaţia $xy + z(x - y) = y^2 + 7$, atunci $|x + z| = 8$ şi $|x - 2y - z| = 6$.

8. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b, c \ge 0$, $a \ge b$ şi $a \ge c$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2+4b^2-c^2+4ab} + \sqrt{a^2-b^2+4c^2+4ac} \le 2(a+b+c).$$

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \cdot b = 1$. Demonstraţi inegalitatea $(a-3)^2 + (b-3)^2 \ge 7$.

10. Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere raţionale nenule, astfel încât $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, atunci numărul $N = \left(\dfrac{xy}{z}+1\right)\left(\dfrac{yz}{x}+1\right)\left(\dfrac{zx}{y}+1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$.

11. Fie numerele reale distincte a şi b care au proprietăţile: $a^2 + b \in \mathbb{Q}$ şi $b^2 + a \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că:

a) numerele $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $b = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietăţile date;

b) dacă $a + b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, atunci a şi b sunt numere raţionale;

GEOMETRIE

26. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latură $2a$ se duc perpendicularele AM şi d, $C \in d$. Fie $N \in AM$, astfel încât $AN = a$ şi $MN = 2a$.

a) Justificaţi şi calculaţi distanţa de la A la planul (MBC).

b) Justificaţi şi calculaţi măsura unghiului format de planele (MBC) şi (NBC).

c) Câte puncte diferite $P_i \in d$ sunt, astfel încât ΔBMP_i să fie dreptunghic pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$? Calculaţi de fiecare dată lungimea segmentului $[CP_i]$.

O.L. Alba, 2011

27. Segmentele AB şi CD sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului AB, iar $N \in CD$ astfel încât $CN = 3 \cdot ND$. Se notează cu X, Y, Z, T punctele $X \in CM$ cu $MX = 3 \cdot CX$, $Y \in AN$ cu $AN = 2 \cdot AY$, $Z \in MD$ cu $MZ = 3 \cdot ZD$, $T \in BN$ cu $BN = 2 \cdot BT$. Verificaţi coplanaritatea punctelor X, Y, Z, T.

O.L. Arad, 2011

28. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se duc $AQ \perp A'B$, $Q \in A'B$, $CR \perp BC'$, $R \in BC'$ şi $DP \perp BD'$, $P \in BD'$.

a) Arătaţi că $(AQP) \perp (CRP)$.

b) Dacă $QR \parallel (ABC)$, atunci $AB \equiv BC$.

prof. Sorin Peligrad, O.L. Argeş, 2011

29. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC, respectiv CD. Se ştie că $\sphericalangle(AC, BD) = 90°$.

a) Arătaţi că $\sphericalangle MNP = 90°$.

b) Arătaţi că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

prof. Ion Roşu, O.L. Argeş, 2011

30. Pe planul triunghiului ABC, cu laturile $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$ şi $AC = 1$, se ridică perpendiculara $AM = \sqrt{2}$.

a) Arătaţi că MC şi BC sunt perpendiculare.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre MC şi (AMB).

O.L. Bacău, 2011

31. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm şi $AM \perp (ABC)$, cu $AM = 12\sqrt{3}$ cm. Calculaţi:

a) distanţa de la M la BC;

b) distanţa de la A la (MBC);

c) măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (MBC).

O.L. Bihor, 2011

32. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $MA \perp (ABC)$, $AB = AM = \sqrt{2}$ cm. Fie $E \in (BC)$, astfel încât $EC = 1$ cm.

a) Arătaţi că $BD \perp MC$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul M la dreapta DE.

c) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul (MCD).

prof. Ioan Ioja, O.L. Bistriţa-Năsăud, 2011

33. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ şi M mijlocul segmentului AO. Planul α conţine punctul M şi este paralel cu planul $(AB'D')$.

a) Demonstraţi că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α.

b) Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ şi $D'C'$ în punctele N, respectiv P, arătaţi că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ şi (PNC).

O.L. Bucureşti, 2011

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUŢIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanaţi codul QR cu camera telefonului, nu din aplicaţia Mate2000+)

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ

Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

Testul 1: 1. a) $2\sqrt{3}$; b) –12; c) $\frac{7\sqrt{2}}{5}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{-1, 4\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right\}$; e) $S = \{-8, 2\}$. **3.** $m_g = 6$. **4.** a) $S = \{(4, -3)\}$; b) $S = \{(3, 2)\}$. **5.** b) $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$; $AC = 5\sqrt{5}$; $AC = AB + BC \Rightarrow A, B, C$ – coliniare; c) $M(2; 5)$. **6.** 420 lei. **7.** a) $\mathscr{P} = 10(3+\sqrt{3})$ cm; b) $\frac{\mathscr{A}_{\Delta ABD}}{\mathscr{A}_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$. **8.** a) Dacă $\sphericalangle BDC = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120° \Rightarrow \sphericalangle AOC = 60°$, deci ΔAOC – echilateral; $\mathscr{A}_{\Delta AOC} = 16\sqrt{3}$ cm^2.

Testul 2: 1. a) 36; b) $3\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{7\}$; c) $S = \{-4, 2\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-6, 2\}$. **3.** 320 lei. **4.** a) $S = \{(2, -3)\}$; b) $S = \{(3, 4)\}$. **5.** $m_a = 5\sqrt{6}$; $m_g = 12$. **6.** b) $AB = 5$, $AC = 5$; $BC = 5\sqrt{2}$. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **7.** a) $BC = 24$ cm; $DM = 6$ cm $\Rightarrow BD = 6$ cm; $AB = 12$ cm şi $AC = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathscr{A}_{\Delta ABC} = 72\sqrt{3}$ cm^2 şi $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 12(3+\sqrt{3})$ cm; b) 25%. **8.** a) $\mathscr{A}_{\Delta CMN} = \mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{\Delta MAN} - \mathscr{A}_{\Delta MBC} - \mathscr{A}_{\Delta NDC} = 950$ cm^2; b) $MN = 50$ cm; d$(C; MN) = 38$ cm; c) $\sin(\sphericalangle CNM) = \frac{19\sqrt{26}}{130}$.

Testul 3: 1. a) 4; b) 1; c) 128. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{1, -2\}$; d) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$. **3.** 35 ani (mama); 14 ani (fiul). **4.** a) $S = \{(-2, -3)\}$; b) $S = \{(2, -1)\}$. **5.** $a = 24$; $b = 6$; $m_a = 15$; $m_g = 12$. **6.** b) $\mathscr{A}_{\Delta ABC} = 48$ (u^2); $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 32$ (u). **7.** a) Se arată că $\sphericalangle B = 60°$. Dacă $CE \perp AB \Rightarrow CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathscr{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm^2; b) Se calculează $\mathscr{A}_{\Delta BDC} = \mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{\Delta ADB} = 36\sqrt{3}$ cm$^2 \Rightarrow$ d$(D; BC) = 6\sqrt{3}$ cm; c) Cum $DC \parallel AB$ şi $DC = \frac{AB}{2}$, atunci CD este linie mijlocie în $\Delta MAB \Rightarrow MD = DA = 12$ cm şi $MC = BC = 12$ cm, deci ΔMAB – echilateral; $\mathscr{A}_{\Delta MAB} = 144\sqrt{3}$ cm^2. **8.** a) $\overset{\frown}{AC} = 60° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 30° \Rightarrow AM = 10$ cm; $BC = 20\sqrt{3}$ cm; $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathscr{A}_{\Delta ABC}} \Rightarrow R = 20$ cm; b) $MA' = 30$ cm $\Rightarrow BA' = CA' = 20\sqrt{3}$ cm; $\mathscr{A}_{ABA'C} = \frac{BC \cdot AA'}{2} = 400\sqrt{3}$ cm^2; $\mathscr{P}_{ABA'C} = 40(\sqrt{3}+1)$ cm.

Testul 4: 1. a) $-16\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $20\sqrt{2}$. **2.** $a = \frac{4}{3}$; $b = \frac{4}{3}$; $m_g = \frac{4}{3}$. **3.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \left\{-\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\right\}$; d) $S = \{-6, 2\}$; e) $S = \{-6, 7\}$. **4.** 36 ani; 12 ani; peste 12 ani. **5.** a) $S = \{(-3, -4)\}$; b) $S =$

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAŢII ÎN $\mathbb{R}$

1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

1. Adevărate: a), b), d), f), h), j), k), l), m); false: c), e), g), i), n), o). **2.** Adevărate: a), b), c), d), e), g), h), i), j), k), l), m), n); false: f). **3.** Adevărate: a), b), e), g), h), i); false: c), d), f), j). **4.** a) F. Contraexemplu: $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$ = 12; b) A; c) A; d) A; e) F. $\left(3+\sqrt{5}\right)^2 = 14+6\sqrt{5}$; f) A. **5.** $\frac{60}{100}$; $\frac{72}{100}$; $\frac{60}{100}$; $\frac{175}{100}$. **6.** $a = 60$. **7.** a) $\frac{6}{10}; \frac{9}{15}; \frac{12}{20}; \frac{30}{50}$; b) $\frac{4}{8}; \frac{12}{16}; \frac{20}{24}; \frac{52}{396}; \frac{32}{52}; \frac{20}{44}$; c) $\frac{1}{4}; \frac{3}{6}; \frac{2}{35}; \frac{4}{9}; \frac{5}{22}; \frac{6}{17}$. **8.** (i) $\frac{1}{2}; \frac{61}{37}; \frac{4}{21}; \frac{8}{15}; \frac{19}{72}$; (ii) $\frac{1}{2}; \frac{2}{6}; \frac{55}{1133}; \frac{4}{21}; \frac{3}{9}; \frac{8}{15}; \frac{35}{56}; \frac{19}{72}$; (iii) $\frac{61}{37}; \frac{85}{15}$; (iv) $\frac{14}{2\cdot 7}; \frac{4\cdot 3\cdot 5}{60}$. **9.** a) (i) $x \in \{4, 5, 7, 11\}$; (ii) $x \in \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$; (iii) $x \in \{1, 2, 3, 8\}$; (iv) $x \in \{0, 1, 3, 10\}$; b) $x \in \{0, 2\}$; c) $x \in \{2, 6\}$. **10.** 0,8; 2,56; 0,3125; 0,136; 4,(3); 0,5(3); 1,8(6); 2,8(3); 1,9(4). **11.** $\frac{83}{20}; \frac{24}{11}; \frac{39}{110}; \frac{1267}{500}; \frac{319}{900}; \frac{28}{15}; \frac{277}{20}; \frac{181}{36}; \frac{401}{400}; \frac{1}{125}; \frac{601}{300}$. **12.** $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $C = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $E = \{9, 16, 25, 36, 49\}$; $F = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. **13.** $B = \{0, -0{,}6, 0{,}6, 5, -5\}$. **14.** a) A; b) A; c) F. **15.** a) F; b) A; c) F. **16.** $A = \left\{4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}, \frac{5\sqrt{2}}{3}, 1, 3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, -2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, 1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-2, 1, 4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap \mathbb{R} = A$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left\{\frac{5\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$. **18.** a) A; b) A; c) A; d) A; e) A; f) A. **19.** a) $u(5n + 3) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 3 \neq k^2$; b) $u(5n + 8) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 8 \neq k^2$; c) Orice pătrat perfect este de forma $7k$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 7n + 3 \neq x^2$; d) $n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2$, de unde $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, adică $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) Analog d), $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$, adică $2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$, aşadar $\sqrt{4n^2+n}$ este între doi întregi consecutivi, deci iraţional; f) Ultima cifră este 3; g) Ultima cifră este 3; h) Ultima cifră este 3; i) Ultima cifră este 2. **20.** $1 \in \mathbb{Q}$; $3-\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **21.** $x = 441$; a) A; b) F; c) A; d) A. **22.** $x = 27$; a) A; b) F; c) A; d) F. **23.** $x = 2010$; a) A; b) A; c) F; d) A. **24.** a) $A = \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$; b) $B = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$; c) $C = \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$. **25.** $\overline{ab} = 65$. **26.** a) $a = 3^n \cdot 2^n$; b) $n = 3$. **27.** a) $x = 7$; b) $x = 8$; c) $x = 0$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **28.** a) $a = 2$; $b = -5$; b) $a = -1$; $b = 8$; c) $a = -6$; $b = 16$. **29.** Fie $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Cum $11r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 11$ şi, analog, $13r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 13 \Rightarrow q = 1$, deci $r = p \in \mathbb{Z}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

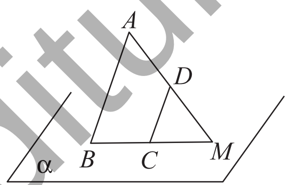
1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

1. a) plan; b) dreaptă; c) dreaptă; d) 6. **2.** a) A; b) A; c) A; d) A. **3.** AB, AC, AE, BC, BD, DE. **4.** a) 6; b) 4; c) 6. **5.** a) o infinitate; b) o infinitate. **6.** a) 8 drepte; b) $(MAB) \cap \alpha = AB$; $(DBC) \cap \alpha = BC$; $(MAC) \cap \alpha = AC$; c) $(BDC) \cap (MAC) = DC$. **7.** a) AB, AC, AD, BC, BD, DC; deci, 6 drepte; b) $BC = \dfrac{2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}}{d(A, BC)} = 12$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BCD} = 90$ cm^2. **8.** a) $\mathcal{A}_{\Delta DAM} = 72\sqrt{5}$ cm^2; b) $MN = 4\sqrt{15}$ cm. **9.** Se arată că ΔMAD este dreptunghic, $\sphericalangle M = 90°$; $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 18\sqrt{2}$ cm^2. **10.** Se arată că ΔMAN este dreptunghic, $\sphericalangle MAN = 90°$; $\mathcal{A}_{\Delta MAN} = 36\sqrt{5}$ cm^2. **11.** $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 24$ cm^2. **12.** a) 6 drepte; b) 15 drepte. **13.** a) 8 drepte; b) 10 drepte. **14.** Dacă cele 5 puncte coplanare sunt coliniare, se determină 6 drepte. Dacă din cele 5 puncte, doar 4 sunt coliniare, atunci se determină 10 drepte. Nu se pot obţine 9 drepte.

2. Determinarea planului

1. (ABC), (ABD), (ACD), (BCD). **2.** a) A; b) A; c) F. **3.** Din prima secundă. **4.** a) (MAB), (MAC), (MAD), (MBC), (MBD), (MCD), (ABC); b) $(MAD) \cap (ABC) = AD$; $(MAC) \cap (MBD) = MO$; $(MAC) \cap (MBC) = MC$. **5.** a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. **6.** a) (ABC), (ABN), (ABD), (ACD), (ACM), (AMN), (BCD); b) $(AMN) \cap (BCD) = MN$; $(ADC) \cap (AMN) = AN$; $(AMN) \cap (ABD) = AM$. **7.** a) $(ABC) \cap \alpha = BC$; $M \in AD \subset (ABC)$; $M \in \alpha \Rightarrow M \in BC$; b) $\Delta MDC \sim \Delta MAB \Rightarrow MA = 48$ cm şi $MB = 60$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta MAB} = 132$ cm (*fig. 1*). **8.** a) $EF \cap \alpha = \{P\}$; $P \in EF \subset (ABC)$; $P \in \alpha$; cum $(ABC) \cap \alpha = BC \Rightarrow P \in BC$; b) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ – dreptunghic, $\sphericalangle A = 90° \Rightarrow EF = 10$ cm (cu teorema lui Pitagora în ΔAEF); $\mathcal{P}_{BCFE} = 92$ cm (*fig. 2*). **9.** $(MQT) \cap (NRP) = RT$ (*fig. 3*). **10.** a) $M \in BC \subset (ABC)$ şi $M \in \alpha$. Cum $(ABC) \cap \alpha = AD \Rightarrow M \in AD$ (*fig. 4*); b) Se observă că DC este linie mijlocie în ΔMAB, deci $AD = DM = 15\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 450\sqrt{3}$ cm^2. **11.** Pot determina un plan sau maxim 7 plane. **12.** a) MA; MB; MC; MD; ME; MF; AB; AC; AD; AE; AF; BC; BD; BE; BF; CD; CE; CF; DE; DF; EF; b) 16 plane. **13.** a) 5; b) 10.

Fig. 1



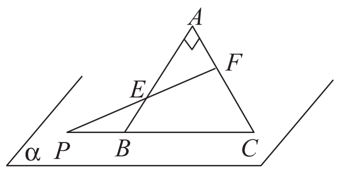
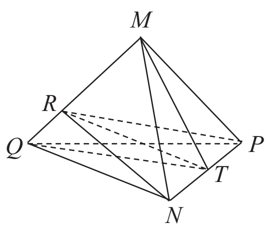


Fig. 2

Fig. 3



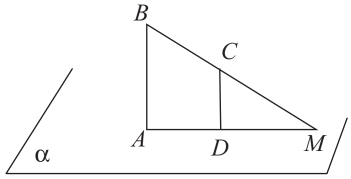


Fig. 4

$AN \perp VD \Rightarrow AN \perp (VBC)$, $AN = \dfrac{90\sqrt{13}}{13}$ cm. **2.** a) $BC = AD = 24\sqrt{3}$ cm; $AB = DC = 8\sqrt{3}$ cm; b) d(D', AB) = $D'A$ = 48 cm; d(D', BC) = $D'C = 16\sqrt{3}$ cm; c) $AC = 8\sqrt{30}$ cm; dacă $DE \perp AC$, $E \in (AC)$, $DE = \dfrac{12\sqrt{30}}{5}$ cm; d(D', AC) = $D'E = \dfrac{12\sqrt{130}}{5}$ cm; d) tg($\sphericalangle D'ED$) = $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

15. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. a) Cu teorema celor trei perpendiculare se arată că $MB \perp BC \Rightarrow \sphericalangle(MB, BC) = 90°$; b) $\sphericalangle((MBC), (ABC)) = \sphericalangle(MB, AB) = \sphericalangle MBA$; $\sphericalangle MBA = 60°$. **2.** $MN = 10$ m; $MP = 6\sqrt{2}$ m; $PN = 10$ m. **3.** Se foloseşte teorema celor trei perpendiculare şi se arată că $CN \perp MN$ şi $DM \perp MN$. Deci, $\sphericalangle(MN, CN) = \sphericalangle(MN, DM) = 90°$, $NC = 5$ m. **4.** ΔCAB – isoscel ($CA = CB = 70$ cm), $\sphericalangle ACB = 30°$; $AD \perp CB$; $AD = \dfrac{AC}{2} = 35$ cm; $CD = 35\sqrt{3}$ cm; $BD = 35(2 - \sqrt{3})$ cm; $AB = 35(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm ($AB \simeq 36{,}05 < 37$).
5. $CF = DE = 5$ m. **6.** $AB = 5$ m. **7.** 2,4 m.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1: A. 1. a) 1; b) –2; c) 0,2. **2.** a) $-2x + 15$; b) $A = [-1; 5]$; c) $(x - 5)(7x - 5)$. **3.** a) 0; b) 10; c) $(-5; 5)$. **4.** a) 12 cm; b) 60°; c) 30°.
B. 5. a) $x \in (1; +\infty)$; b) $a \in [-6; 4]$, $b \in [-3; 7]$ şi $c \in [-2; 8]$; c) $A = (-4; 5)$; $B = [-5; 4]$; $A \cap B = (-4; 4]$; $A \cup B = [-5; 5)$. **6.** a) $\sphericalangle(SA, (SBD)) = 45°$; b) d($O$, ($SBC$)) = $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ cm; c) ON – linie mijlocie în $\Delta SAC \Rightarrow ON \parallel SA$ şi MN – linie mijlocie în ΔSBC, deci $MN \parallel SB$; d) $\sphericalangle(MN, BD) = \sphericalangle(SB, BD)$. Se arată că ΔSBD este dreptunghic şi isoscel, deci $\sphericalangle SBD = 45°$.
TESTUL 2: A. 1. a) 24; b) –4; c) $[-7; 4)$. **2.** a) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$; b) –7; c) 2, 3, 5. **3.** a) $[-4; 5]$; b) $x \in (-\infty; 1)$; c) $b > a$. **4.** a) $6\sqrt{5}$ cm; b) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; c) 12 cm.
B. 5. a) $(x + 3)(x - 2)(x + 2)(x - 1)$; b) Se înmulţeşte relaţia cu 2 şi se construiesc trei pătrate perfecte; $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$; c) $E(x) = |5y| + |5y - 2|$; cum $0 < y < \dfrac{2}{5} \Rightarrow |5y| = 5y$ şi $|5y - 2| = -5y + 2 \Rightarrow E(x) = 2$. **6.** a) Cu $R_1T_3\perp$ se arată că $C'A \perp AB \Rightarrow \sphericalangle C'AB = 90°$; b) $BC = 6\sqrt{5}$ cm; $CC' = 6$ cm; $BC' = 12$ cm; c) tg($\sphericalangle(BC, \alpha)$) = tg $\sphericalangle CBC' = \dfrac{1}{2}$; d) Cum $AB \perp (C'AC)$ şi $AB \subset (CAB) \Rightarrow (CAB) \perp (CAC')$ (*fig. 1*).

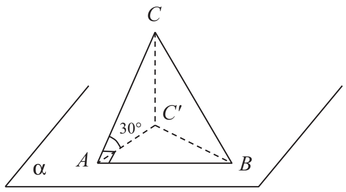


Fig. 1

TESTUL 3: A. 1. a) $\dfrac{37}{12}$; b) –2; c) 14. **2.** a) $[-1; 2)$; b) A; c) 3. **3.** a) $(x - 6)(x - 7)$; b) $-12x\sqrt{3}$; c) $(-3; 2] \cup \{3, 4\}$. **4.** a) 45°; b) $4\sqrt{2}$ cm; c) 45°.
B. 5. a) $x \in [0; 4]$ şi $y \in [-5; -1] \Rightarrow x > y$; b) (i) $E_1(x) = (x + 2)(2x - 1)(2x + 1)$; $E_2(x) = (2x + 1) \cdot (x - 2)(x + 2)$; (ii) $E_1(x) - E_2(x) = (2x + 1)(x + 2)(2x - 1 - x + 2) = (2x + 1)(x + 2)(x + 1)$. Din $E_1(x) - E_2(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}\right\}$. **6.** a) $DD' = 15$ cm; $DC = AB = 20$ cm; b) $\sphericalangle(AD', BC) =$

$= \sphericalangle(AD', AD) = 45°$; $\text{tg}(\sphericalangle(DC', (ABC)) = \text{tg}(\sphericalangle D'CD) = \frac{3}{4}$; c) Folosind teorema liniei mijlocii într-un triunghi se arată că $MOND'$ este paralelogram, cu diagonalele OD' şi MN.

TESTUL 4: A. 1. a) $-2\sqrt{2}$; b) -2; c) $\{0, 1, 2\}$. **2.** a) $a = 2$; b) $-2x + 23$; c) $4x(x-3)(2x-3)$. **3.** a) F; b) 4; c) $(-5; 2)$. **4.** a) 16 cm; b) 60°; c) 60°.

B. 5. a) $(x-4)(x+3)(x-2)(x+1)$; b) $a = \frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ (A); c) $x \in (-\infty; 4]$. **6.** a) $VO = d(V, (ABC)) = 18\sqrt{2}$ cm; b) $\sphericalangle(VB, AD) = \sphericalangle(VB, BC) = \sphericalangle VBC$; $\cos(\sphericalangle VBC) = \frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $\sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle(VB, VO) = 30°$; d) $d(O, (VBC)) = \frac{18\sqrt{14}}{7}$.

TESTUL 5: A. 1. a) -3; b) $-2, -1$; c) 6. **2.** a) $(-4; 4)$; b) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; c) -4. **3.** a) $-10x - 18$; b) $(x+2)^2(x-1)^2$; c) 6. **4.** a) $25\sqrt{3}$ cm^2; b) 45°; c) $5\sqrt{2}$ cm.

B. 5. a) $E(x) = \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(3y-2)^2} = 3|y| + |3y-2|$. Cum $0 \le y \le \frac{2}{3} \Rightarrow |y| = y$ şi $|3y-2| = -3y + 2 \Rightarrow E(x) = 2$; b) $(x+3)(x-1)(x+1)^2$; c) Relaţia se poate scrie: $3a + 9 = \sqrt{3}(6-b)$; cum a şi b sunt raţionale $\Rightarrow 6 - b = 0 \Rightarrow 3a + 9 = 0$, deci $b = 6$ şi $a = -3$. **6.** a) Dacă a, b şi c sunt dimensiunile paralelipipedului, atunci avem relaţiile: $b^2 + c^2 = 1800$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3400$ şi $a^2 + c^2 = 2500$, din care se obţin $a = 40$ cm, $b = 30$ cm şi $c = 30$ cm; b) $\sphericalangle(D'A, BC) = \sphericalangle(D'A, AD) = 45°$; c) $\sphericalangle(D'C, (ABC)) = \sphericalangle D'CD$; $\text{tg}(\sphericalangle D'CD) = \frac{3}{4}$; d) Se arată că $OBO'D'$ este paralelogram, de unde $D'O \parallel BO' \Rightarrow D'O \parallel (BA'C')$.

PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI ŞI A CONCURSURILOR ŞCOLARE

ALGEBRĂ

1. $a = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - 1$; $|x| = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = 3 - \sqrt{2} \in (1; 2) \Rightarrow A = \{-1, 0, 1\}$; $\sqrt{n} - 1 \in A$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow n = 4$. **2.** $\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a} + \frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b} = k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(2 - ab) = k(2 + ab) - \sqrt{2}k(a+b)$; cum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ ab = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a + b = 0 \\ k = -2 + \frac{8}{2-a^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow |a| \in \{0, 1, 2\}$; $(a, b) \in \{(-2; -1), (-1; -2), (1; 2), (2; 1)\}$ sau $(a, b) \in \{(-1; 1), (1; -1), (0; 0)\}$. **3.** a) $\sqrt{a^4 + 4b^2} + \sqrt{b^4 + 4a^2} = \sqrt{(a^2-2)^2} + \sqrt{(b^2-2)^2} = |a^2 - 2| + |b^2 - 2| = 2 - a^2 - b^2 + 2 = 4 - (a^2 + b^2) = 3$.

4. a) $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \Leftrightarrow a - c = \sqrt{3}(d - b)$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow d - b = 0 \Rightarrow d = b$, $a - c = 0 \Rightarrow a = c$; b) $1 + \sqrt{3} = a^2 + c^2 + 3b^2 + 3d^2 + \sqrt{3}(2ab + 2cd)$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 2ab + 2cd = 1 \mid \cdot\left(-\sqrt{3}\right)$; $a^2 + c^2 + 3b^2 + 3d^2 = 1$ (1) $\Rightarrow -2ab\sqrt{3} - 2cd\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ (2). Adunând relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\left(a - b\sqrt{3}\right)^2 + \left(c - d\sqrt{3}\right)^2 = 1 - \sqrt{3}$, fals. **5.** Se ştie că $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$. Notăm $a = \frac{1}{x-y}$, $b = \frac{1}{y-z}$ şi $c = \frac{1}{z-x}$. Atunci $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \right.$

Cuprins

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU