Gabriel POPA
Dorel LUCHIAN
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

ediția a VI-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Iuliana Ene, Ionuț Burcioiu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Gabriel Popa, Dorel Luchian, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea. – Ed. a 6-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4310-0

I. Popa, Gabriel
II. Luchian, Dorel
III. Zanoschi, Adrian
IV. Iurea, Gheorghe

51

TESTE INIȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $3(\sqrt{2}-1)-\sqrt{18}$ este:

A. –1; B. –3; C. $6\sqrt{2}$; D. $-6\sqrt{2}$.

(0,5p) **2.** Soluția ecuației $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{3}=1\frac{5}{6}$ este:

A. $\frac{9}{5}$; B. 11; C. 9; D. 0.

(0,5p) **3.** Valoarea lui m pentru care perechea (–2, 1) este soluție a sistemului $\begin{cases}2x+3y=-1\\ mx-y=3\end{cases}$ este:

A. 3; B. 4; C. 1; D. –2.

(0,5p) **4.** Lungimea segmentului având capetele $A(1, 2)$ și $B(2, -1)$ este:

A. 4; B. 5; C. $3\sqrt{2}$; D. $\sqrt{10}$.

(0,5p) **5.** Un romb $ABCD$ are $\sphericalangle BAD = 30°$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

A. 90°; B. 120°; C. 150°; D. 60°.

(0,5p) **6.** Un pătrat are aria egală cu 8 cm^2. Lungimea diagonalei sale este:

A. 8 cm; B. 4 cm; C. $2\sqrt{2}$ cm; D. $4\sqrt{2}$ cm.

(0,5p) **7.** Lungimea cercului având raza egală cu π cm este:

A. $2\pi^2$ cm; B. 2π cm; C. π^2 cm; D. 4π cm.

(0,5p) **8.** Aria hexagonului regulat având apotema egală cu $6\sqrt{3}$ cm este:

A. 108 cm^2; B. $72\sqrt{3}$ cm^2; C. 54 cm^2; D. $216\sqrt{3}$ cm^2.

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Fie numerele $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}$ și $b=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{5^2-4^2}$. Aflați media geometrică a celor două numere.

(1p) **2.** Prețul unui produs este 120 lei. După o scumpire, prețul devine 126 lei. Aflați cu ce procent s-a scumpit produsul.

(1p) **3.** Un trapez isoscel are lungimea bazei mari egală cu 12 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 10 cm. Aflați lungimea segmentului care unește mijloacele diagonalelor.

4. În figura 1, triunghiul ABC este dreptunghic cu $\measuredangle A = 90°$, E este mijlocul laturii AB, iar AD este perpendicular pe BC ($D \in BC$). Se știe că $AD = 6\sqrt{2}$ cm și $\frac{CD}{BD} = 0{,}5$.

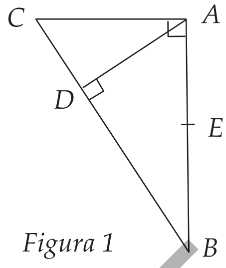


Figura 1

(1p) a) Aflați aria triunghiului ABC.

(1p) b) Aflați perimetrul triunghiului CDE.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(2\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}\right) \cdot 2^{-1}$ este:

A. 2; B. $\sqrt{2}$; C. $3\sqrt{2}$; D. 0.

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr întreg, mai mare decât $4\sqrt{3}$, este:

A. 7; B. 6; C. 49; D. 8.

(0,5p) **3.** Suma soluțiilor ecuației $|2x - 1| = 5$ este:

A. 5; B. 3; C. 1; D. –2.

(0,5p) **4.** În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională.

x	0	1	a
$y = 2x - 1$	–1	1	5

Valoarea lui a este:

A. 9; B. –2; C. 3; D. 4.

(0,5p) **5.** Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $\sqrt{18}$ cm este:

A. 3 cm; B. 6 cm; C. 9 cm; D. 4 cm.

(0,5p) **6.** Aria rombului $ABCD$ în care $AB = 10$ cm și $AC = 12$ cm este:

A. 192 cm^2; B. 120 cm^2; C. 60 cm^2; D. 96 cm^2.

(0,5p) **7.** Fie un triunghi ABC și punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, astfel încât $PQ \parallel BC$. Dacă $AB = 16$ cm, $AP = 12$ cm, $QC = 3$ cm, atunci lungimea laturii AC este:

A. 9 cm; B. 12 cm; C. 6 cm; D. 8 cm.

(0,5p) **8.** Rezultatul calculului $8 \cos 60° \sin 30° - \operatorname{tg} 45°$ este:

A. 2; B. –1; C. 1; D. 0.

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Numerele naturale x, y, z verifică relațiile $\sqrt{x+1} = 2$ și $\sqrt{y(z+4)} = 3$. Aflați media aritmetică a celor trei numere.

(1p) **2.** Șapte caiete de matematică și cinci caiete dictando costă 41 lei. Aflați prețul fiecărui tip de caiet, știind că cel dictando costă cu un leu mai mult decât cel de matematică.

CAPITOLUL I
INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

I.1. Mulțimi definite cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor

Dacă, pentru o mulțime M, putem identifica o anumită proprietate p pe care toate elementele mulțimii o verifică și niciun element care nu aparține mulțimii nu o verifică (numită **proprietate caracteristică** a mulțimii M), vom nota mulțimea M astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: „M este mulțimea acelor x care au proprietatea p”.

Probleme rezolvate

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:

$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *paralelipiped*$\}$; $B = \{a \mid a$ este cifră, $\overline{12a} \,\vdots\, 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \leq 3\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = -5\}$.

Soluție: $A = \{$a, e, i$\}$; $B = \{0, 3, 6, 9\}$; $C = \{-1, 1, 2, 3\}$; $D = \{(-5, 1); (-1, 5); (1, -5); (5, -1)\}$.

2. Fie mulțimea $A = \{8, 12, 20, 27, 30, 45, 106\}$. Determinați mulțimile:

$$B = \{x \in A \mid x \,\vdots\, 4\};\ C = \{x \in A \mid x \,\vdots\, 9\};\ D = \{x \in A \mid x \,\vdots\, 2 \text{ și } x \not\vdots\, 4\}.$$

Soluție: $B = \{8, 12, 20\}$; $C = \{27, 45\}$; $D = \{30, 106\}$.

3. Considerăm, în plan, un sistem ortogonal de axe xOy și notăm cu (x_P, y_P) coordonatele unui punct P. Reprezentați geometric mulțimile:

a) $A = \{P \mid x_P = 0\}$; b) $B = \{P \mid y_P = 1\}$; c) $C = \{P \mid x_P < 0\}$.

Soluție: a) Elementele mulțimii A sunt acele puncte care au abscisa egală cu 0, adică toate punctele axei Oy (figura 1).

b) Elementele mulțimii B sunt acele puncte care au ordonata egală cu 1, adică punctele unei drepte paralele cu axa Ox, care conține punctul $M(0, 1)$ (figura 2).

c) Elementele mulțimii C sunt acele puncte care au abscisa negativă și ordonata neprecizată, adică toate punctele semiplanului deschis cu frontiera Oy, situat în stânga axei Oy (figura 3).

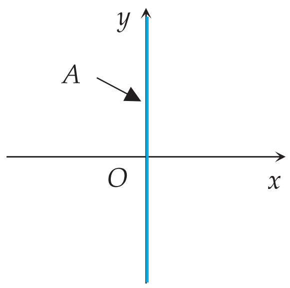


Figura 1

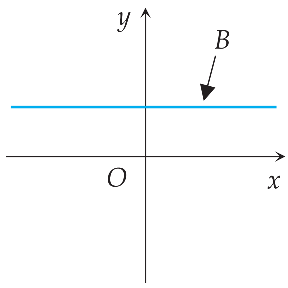


Figura 2

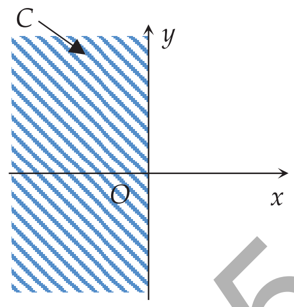


Figura 3

4. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 32 - 3p, p \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că $A = B$.

Soluție: Vom demonstra că $A \subset B$ și $B \subset A$. Fie $x \in A$, adică $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = 32 + 3k - 30 = 32 - 3(10 - k)$. Notând $10 - k = p \in \mathbb{Z}$, obținem că $x = 32 - 3p$, deci $x \in B$ și deducem că $A \subset B$. Reciproc: Dacă $x \in B$, rezultă că $x = 32 - 3p = 3(10 - p) + 2 = 3k + 2$, unde $k = 10 - p \in \mathbb{Z}$. Astfel, $x \in A$ și am arătat că $B \subset A$, ceea ce încheie demonstrația.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:
$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *mulțime*$\}$; $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$;
$C = \{x \mid x$ este cifră a bazei 2$\}$; $D = \{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$.

2. Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A = \{x \mid \overline{2x5} \vdots 3\}$; b) $B = \{x \mid \overline{x32} \vdots 2\}$;
c) $C = \{x \mid \overline{xx72} \vdots 9\}$; d) $D = \{x \mid \overline{12x} \vdots 4\}$.

3. Fie mulțimile $A = \{-2, 1, 7\}$ și $B = \{0, 1\}$. Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$;
c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$; d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ și $y \in B\}$.

4. Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x < 15\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 2\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| < 2\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x - 1 \leq 3\}$.

5. Scrieți cu ajutorul unei proprietăți caracteristice următoarele mulțimi:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$; d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$.

6. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 4k + 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

b) Stabiliți dacă numerele 200, 201 și 202 aparțin celor două mulțimi.

c) Arătați că $A \subset B$ și $B \not\subset A$.

7. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

a) Stabiliți dacă numerele 2018, 2019 și 2020 aparțin celor trei mulțimi.

b) Determinați $A \cap B$.

c) Determinați $A \cup B \cup C$.

8. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 7\}$; b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 2\}$;

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + y = 1$ și $x - 2y = 5\}$.

9. Determinați cardinalul fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \le 25\}$;

c) $C = \{\overline{abc} \mid a + c = 2\}$; d) $D = \{\overline{xy} \mid x > y\}$.

10. Se consideră mulțimea $M = \left\{0; -\frac{6}{2}; -\sqrt{2\frac{1}{4}}; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in M \mid x \ge 0\}$; b) $B = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$;

c) $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; d) $D = \{x \in M \mid x \ge y,\ \forall\, y \in M\}$.

11. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{x} \in \mathbb{N}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{9}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-3}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \le 9\}$. Determinați elementele mulțimilor A, B, C și D, unde: $A = \{x \in M \mid |x| = x\}$, $B = \{x \in M \mid |x| = -x\}$, $C = \{x \in M \mid |x| \le 2\}$, $D = \{x \in M \mid |x| \ge 4\}$.

13. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 201 - 2p,\ p \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că $A = B$.

14. Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, determinați următoarele mulțimi:

a) $P = \{M \mid M \in BC,\ BM = MC\}$; b) $Q = \{M \mid MA = MB = MC\}$;

c) $R = \{M \mid MA = MB\}$; d) $S = \{M \mid d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)\}$.

15. Reprezentați, în raport cu un reper cartezian xOy, următoarele mulțimi de puncte din plan:

a) $B_1 = \{M \mid x_M = y_M\}$; b) $B_1 = \{M \mid x_M = -y_M\}$; c) $C = \{M \mid x_M = y_M;\ -1 \le x_M \le 1\}$.

CAPITOLUL II
CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

II.1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere: adunarea și scăderea. Reducerea termenilor asemenea

1. Pentru a calcula sumele $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ sau $3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}$ folosim proprietăți ale operațiilor cu numere reale:

$$3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(3+5)\sqrt{3}=8\sqrt{3};$$
$$3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}=(3+5)\cdot 7^{13}=8\cdot 7^{13}.$$

Dacă înlocuim numerele $\sqrt{3}$ sau 7^{13} cu un număr real oarecare x, avem în mod analog:

$$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x.$$

În toate calculele pe care le vom efectua în continuare, prin litere desemnăm numere reale oarecare.

2. În suma algebrică:

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 5,$$

termenii sunt $3x^2$, $-2xy$, y^2 și -5; termenul $3x^2$ are coeficientul 3, $-2xy$ are coeficientul -2, iar y^2 are coeficientul 1.

3. Termenii $-2xy$ și $7xy$, care au aceeași parte literală, se numesc **termeni asemenea**.
De obicei, într-o sumă algebrică, termenii asemenea se reduc:

$$\underline{6x^2} - \underline{\underline{2xy}} + \underline{\underline{7xy}} - \underline{10x^2} + 3 = -4x^2 + 5xy + 3.$$

Problemă rezolvată

Fie x și y două numere reale. Calculați:

a) $9x - 7y + 3y - 2x$;
b) $x + 4x + 5y - 11x - 12y + 7y$;
c) $2(x + 3y) - 3(2x - y)$;
d) $(2x - y) - (x - 3y) - (-x + 2y)$.

Soluție: a) $9x - 7y + 3y - 2x = (9x - 2x) + (-7y + 3y) = 7x - 4y$;
b) $x + 4x + 5y - 11x - 12y + 7y = (x + 4x - 11x) + (5y - 12y + 7y) = -6x + 0 = -6x$;
c) $2(x + 3y) - 3(2x - y) = 2x + 6y - 6x + 3y = -4x + 9y$;
d) $(2x - y) - (x - 3y) - (-x + 2y) = 2x - y - x + 3y + x - 2y = 2x$.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $-3x + 5x$; b) $2x + 11x - 15x$;
c) $2y - 3y + 10y - 7y$; d) $12t - 10t - 20t + 15t$.

2. Calculați:

a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x$; b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x$;
c) $0{,}3x - 0{,}5x + 1{,}2x$; d) $0{,}2y - \frac{1}{5}y - 0{,}8y + \frac{4}{5}y$.

3. Calculați:

a) $20a - 17a + a$; b) $9a + 2a - 13a$;
c) $-5b + b + 3b$; d) $5b - (-2b) + 8b$;
e) $19c - 12c - (7c)$; f) $-(-3c) + (-2c) - (4c) + 5c$.

4. Calculați:

a) $2a - 3a - 4$; b) $x - 5 + 6x - 4$;
c) $-2a + 3x + 5a - 9x$; d) $11a + 3x - 12x - 4a$;
e) $3a - 2 + a + 3 - 5a - 1$; f) $-2x + 7x - 5a - 4x + 4a$.

5. Calculați:

a) $x - 2y + 3x + 7y$; b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$;
c) $\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{3}b - 2a$; d) $3x - x + 2y - 2x$;
e) $a - 3b - a + 4c - b + 8c$; f) $x - 3y + 4x - 2z + 5y + (-3z)$.

6. Calculați:

a) $3x - (4x - 2)$; b) $(x - 1) - (-3x + 1) - (2x - 3)$;
c) $-(3 - 2x) - (-x + 2) + (-4x)$; d) $7 - (2x - 3) + (-3x + 4)$.

7. Calculați:

a) $(4a - 3b) - (-a + 2b) + (5b - 4a)$;
b) $(x^2 - x + 2) - (-x^2 + 3x + 1) - (4x^2 + 1)$;
c) $-(4x + x^2) - (2 - x) + (x^2 - 3x + 2)$;
d) $-(a - b + c) + (a + b - c) - (-a + b + c) + (-a - b + c)$.

8. Calculați:

a) $7x - 2 - [-x - (-6x + 2)]$; b) $x + 5 - [3x - 6 - (2x - 10)]$;
c) $x - 2 - \{x - 3 - [5x - 4 - (6x - 2)]\}$; d) $9 - \{2x - [x - (1 - x) + (2x - 1)]\}$.

9. Fie a, b și c trei numere reale astfel încât $a + 2b = 174$ și $a + b + c = 426$. Determinați $b - c$ și $2a + 3b + c$.

c) $b - 2b - 3b + 4b + 5b - 6b - 7b + 8b + \dots + 37b - 38b - 39b + 40b$;

d) $y + 2y - 3y + 4y + 5y - 6y + \dots + (31y + 32y - 33y)$.

20. Fie x, y, z trei numere reale astfel încât $2x - 3y + 5 \geq 0$, $3y - 5z + 16 \geq 0$ și $5z - 2x - 21 \geq \geq 0$. Arătați că $2x - 6y + 5z$ este un număr prim.

II.2. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere: înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere

Pentru a efectua calculele în care avem înmulțiri, împărțiri sau ridicări la putere, folosim regulile de calcul cu puteri, distributivitatea înmulțirii față de adunare/scădere, regulile de desfacere a parantezelor:

$(2x^3y^2)\cdot(-3xy^4) = -6x^4y^6$;

$(-4x^2y^5):(-3xy^3) = \frac{4}{3}xy^2 \ (x, y \neq 0)$;

$(x+1)^3 : (-x-1)^2 = (x+1)^3 : (x+1)^2 = x+1 \ (x \neq -1)$;

$(2x-1)^2 \cdot (6x-3)^3 = (2x-1)^2 \cdot (27(2x-1)^3) = 27(2x-1)^5$;

$(-2x^2y^3z)^3 = -8x^6y^9z^3$;

$x\cdot(2x-y) = x\cdot(2x) - x\cdot y = 2x^2 - xy$;

$(x^2-x-1)\cdot(-2x) = x^2\cdot(-2x) - x\cdot(-2x) - 1\cdot(-2x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x$;

$(2x^3-3x^2+4x):x = (2x^3):x-(3x^2):x+(4x):x = 2x^2-3x+4 \ (x \neq 0)$;

$(x+1)(2x-1) = (x+1)\cdot 2x + (x+1)\cdot(-1) = 2x^2+2x-x-1 = 2x^2+x-1$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)(x - 2) - (x + 3)(x - 3) - (5 - 6x)$. Arătați că $E(x) = (x + 1)(x + 2)$, pentru orice număr real x.

Soluție: $E(x) = 2x^2 - 4x + x - 2 - (x^2 - 3x + 3x - 9) - 9 + 6x = 2x^2 - 3x - 2 - (x^2 - 9) - 5 + 6x = 2x^2 - 3x - 2 - x^2 + 9 - 5 + 6x = x^2 + 3x + 2$ și $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$, rezultă că $E(x) = (x + 1)(x + 2)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră expresia $E(x) = x^2 - 2x\cdot\left[x^2 + \left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)\right] + 5(2x+5)$, unde x este număr real.

a) Arătați că $E(x) = x^2 + 25$, pentru orice număr real x.

b) Calculați $\sqrt{E(12)}$.

Soluție: a) $E(x) = x^2 - 2x\cdot\left(x^2 + 5 + x\sqrt{5} - x\sqrt{5} - x^2\right) + 10x + 25 = x^2 - 10x + 10x + 25 = x^2 + 25$.

b) Deoarece $E(12) = 12^2 + 25 = 169$, rezultă că $\sqrt{E(12)} = 13$.

II.9. Fracţii algebrice. Amplificarea şi simplificarea

Probleme rezolvate

1. Determinați numerele reale x pentru care fracția $\frac{2x-2}{x^2-1}$ are sens.

Soluție: Fracția are sens dacă numitorul ei, $x^2 - 1$, este diferit de zero, adică $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Spunem că mulțimea $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ este domeniul maxim de definiție al fracției $\frac{2x-2}{x^2-1}$.

2. a) Amplificați fracția $\frac{x+3}{x}$ cu $x + 1$.

b) Aduceți fracțiile $\frac{x+3}{x}$, $\frac{3}{2x+2}$ și $\frac{x+2}{x^2+x}$ la același numitor.

Soluție: a) ${}^{x+1)}\frac{x+3}{x} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)x} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+x}$;

b) Un numitor comun al celor trei fracții este $2x(x + 1)$. Avem ${}^{2(x+1))}\frac{x+3}{x} = \frac{2x^2+8x+6}{2x(x+1)}$;

${}^{x)}\frac{3}{2x+2} = \frac{3x}{2x(x+1)}$; ${}^{2)}\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{2x+4}{2x(x+1)}$.

3. Se consideră fracția $F(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq 2$.

a) Simplificați fracția.

b) Calculați $F(-1)$.

c) Determinați numerele întregi x pentru care $F(x)$ este număr întreg.

Soluție: a) $F(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}^{(x-2} = \frac{x-2}{x+2}$;

b) $F(-1) = \frac{-1-2}{-1+2} = -3$;

c) Fracția $F(x)$ este număr întreg dacă și numai dacă $x + 2$ divide pe $x - 2$. Cum $x - 2 = x + 2 - 4$, condiția anterioară este echivalentă cu $x + 2$ divide pe 4. Deci, $x + 2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, de unde rezultă că $x \in \{-6, -4, -3, -1, 0\}$ (căci $x \neq 2$).

Probleme propuse

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care are sens fiecare dintre următoarele fracții:

a) $\dfrac{1}{x+3}$; b) $\dfrac{x+1}{2x-3}$; c) $\dfrac{x}{x^2-9}$; d) $\dfrac{x^2}{x^2+4x+4}$.

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care **nu** este definită fiecare dintre următoarele fracții:

a) $\dfrac{x}{x-2}$; b) $\dfrac{3}{2x+1}$; c) $\dfrac{x^2+1}{4-x^2}$; d) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

3. Se consideră fracția algebrică $F(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, unde x este număr real, $x \neq -1$. Calculați $F(1)$, $F(2)$ și $F(-2)$.

4. Se consideră fracția algebrică $F(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, unde x este număr real, $x \neq 0$. Calculați:

a) $F(\sqrt{2})$; b) $F(a)-F(-a)$, unde $a \in \mathbb{R}^*$; c) $F(2) \cdot F(3) \cdot \ldots \cdot F(10)$.

5. Efectuați amplificările*:

a) ${}^{x)}\dfrac{x+1}{x-1}$; b) ${}^{2x-1)}\dfrac{x}{2x+1}$; c) ${}^{2x^2)}\dfrac{x+2}{x^2+1}$; d) ${}^{x^2-x+1)}\dfrac{x+1}{x^2}$.

6. Amplificați cu $x-1$ fiecare dintre următoarele fracții algebrice:

a) $\dfrac{3}{x}$; b) $\dfrac{x}{x+1}$; c) $\dfrac{x+1}{x-1}$; d) $\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$.

7. Amplificați fracția algebrică $\dfrac{x}{x+2}$ cu:

a) x; b) $x-2$; c) x^2+1; d) $2x+3$.

8. Aduceți la același numitor fracțiile algebrice:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{x}$; b) $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{2}{x+1}$; c) $\dfrac{x}{x+1}, \dfrac{x+2}{x^2-1}$; d) $\dfrac{1}{x^2+x}, \dfrac{2}{x^2-1}$.

9. Aduceți la același numitor fracțiile algebrice:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{x}, \dfrac{5}{3x^2}$; b) $\dfrac{2}{x-1}, \dfrac{x}{x+1}, \dfrac{x+2}{x^2-1}$;

c) $\dfrac{2}{x-1}, \dfrac{3}{(x-1)^2}, \dfrac{x}{(x-1)^3}$; d) $\dfrac{1}{x^2-2x}, \dfrac{3}{x^2+2x}, \dfrac{x-1}{x^2-4}$;

e) $\dfrac{x}{x-2}, \dfrac{5}{x}, \dfrac{3}{x^2-2x}$; f) $\dfrac{x}{x-3}, \dfrac{3}{x^2-9}, \dfrac{7}{2x+6}, \dfrac{1}{x+3}$.

* Presupunem că literele aparțin unor mulțimi de numere reale pentru care toate calculele au sens.

27. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{3}{x-3}+\frac{x+1}{x+3}\right):\frac{x^3+x^2+6x}{x^5-9x^3}$, unde x este număr real, diferit de –3, 0 și 3.

a) Arătați că $E(x) = x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$.

b) Determinați numerele reale a și b, știind că $E(a + b + 1) + E(a) = 2b$.

28. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{4x^2+2x+1}{2x-1}-\frac{10x^2}{1-4x^2}:\frac{5x}{2x+1}\right)\cdot\frac{2x-3}{4x^2+4x+1}$, unde x este număr real, diferit de $-\frac{1}{2}$, 0 și $\frac{1}{2}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{2x-3}{2x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

b) Aproximați cu o zecime prin lipsă numărul $E(a)$, unde $a = \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$.

29. Fie $E(x)=\frac{1}{x^2-x-2}:\left(\frac{x}{x+1}+\frac{6}{x-2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x^2+4x+6}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) Determinați valoarea maximă a lui $E(x)$.

30. Se consideră expresia $E(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2+3x+2}:\left(\frac{x}{x+1}-\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x^2+3x+2}\right)$, unde x este număr real, diferit de –2 și –1.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x+3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$.

b) Determinați valoarea minimă a lui $E(x)$.

II.13. ECUAȚII DE FORMA $ax^2 + bx + c = 0$, UNDE $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește **ecuație de gradul al II-lea**.

Numerele a, b, c se numesc **coeficienții** ecuației.

O astfel de ecuație poate avea două soluții reale, o soluție reală sau nicio soluție reală. Aceste trei cazuri sunt determinate de semnul numărului $\Delta = b^2 - 4ac$, numit **discriminantul** ecuației.

I. Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale (distincte):

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

și $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

II. Dacă $\Delta = 0$, ecuația are o soluție reală:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

și $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a(x - x_1)(x - x_1)$.

Comparând ultima relație cu relația similară de la cazul precedent, putem considera că ecuația are și în acest caz două soluții reale, dar egale, adică:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

III. Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are nicio soluție reală.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Rezolvați următoarele ecuații de gradul al doilea (cu necunoscuta x):

a) $x^2 - 5x = 0$; b) $4x^2 - 9 = 0$; c) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

d) $2x^2 - 5x - 12 = 0$; e) $3x^2 + 5x + 4 = 0$; f) $mx^2 + (m - 2)x - 2m + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$.

Soluție: a) Avem $a = 1$, $b = -5$, $c = 0$ și $\Delta = b^2 - 4ac = 25$. Ecuația are soluțiile $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-5}{2} = 0$ și $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+5}{2} = 5$. Ecuația se poate rezolva și astfel: $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

b) Observăm că $a = 4$, $b = 0$, $c = -9$ și $\Delta = 144$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{3}{2}$ și $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2}$.

Ecuația se poate rezolva și astfel: $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

c) Cum $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$ și $\Delta = 0$, rezultă că $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = -3$. O altă rezolvare ar fi: $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ $(= x_1 = x_2)$.

d) Deoarece $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ și $\Delta = b^2 - 4ac = 121$, rezultă că $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{3}{2}$ și $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 4$.

e) Avem $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$ și $\Delta = -23 < 0$, deci ecuația nu are nicio soluție reală.

f) Întrucât $a = m$, $b = m - 2$, $c = -2m + 2$, $\Delta = b^2 - 4ac = 9m^2 - 12m + 4 = (3m - 2)^2 \geq 0$, avem $x_{1,2} = \frac{2-m\pm|3m-2|}{2m}$ și deci $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2-2m}{m}$. Observăm că, pentru $m = \frac{2}{3}$, $x_1 = x_2 = 1$.

PROBLEME PROPUSE

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1. a) $x^2 + 4x = 0$; b) $x^2 - x = 0$; c) $5x^2 + 3x = 0$;
d) $2x^2 = x$; e) $-4x = x^2$; f) $x^2 = x\sqrt{2}$.

2. a) $x^2 - 9 = 0$; b) $x^2 = 16$; c) $4x^2 - 25 = 0$;
d) $-2x^2 + 8 = 0$; e) $x^2 - 3 = 0$; f) $3x^2 + 27 = 0$.

3. a) $x^2 - 4x + 4 = 0$; b) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$; c) $(x - 2)^2 = 4$;
d) $(x + 1)^2 - 9 = 0$; e) $x^2 + 2x + 1 = 25$; f) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 27$.

4. a) $x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $x^2 + 7x + 12 = 0$; c) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
d) $x^2 + x - 2 = 0$; e) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; f) $-6x^2 - x + 2 = 0$.

5. a) $x^2 + 4x + 2 = 0$; b) $x^2 - 3x + 1 = 0$; c) $x^2 + x - 1 = 0$;
d) $-x^2 + 2x + 5 = 0$; e) $2x^2 - x + 1 = 0$; f) $-x^2 + 2x - 3 = 0$.

6. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care are sens fiecare dintre următoarele fracții algebrice:

a) $\dfrac{1}{2x^2 - 3x}$; b) $\dfrac{x+1}{x^2 - x + 1}$; c) $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 3}$; d) $\dfrac{x^2 + 1}{4x^2 - 8x + 1}$.

7. Descompuneți în factori:

a) $x^2 - 5x + 6$; b) $2x^2 + 3x - 2$; c) $3x^2 - 30x + 75$;
d) $x^2 - 2x - 2$; e) $x^2 + 3x + 1$; f) $4x^2 - 4x - 1$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + 2x = 3$; b) $x^2 - 2x = 15$;
c) $2x^2 + 3x = 4x + 1$; d) $x(x - 2) - 4(x + 1) = 3$;
e) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x - 2)(x + 2)$; f) $6(x + 1)^2 - 2(2x + 1)^2 = (x - 2)(x + 3) - 8$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\dfrac{x}{x+1} = x + 4$; b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5}{6}$;
c) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$; d) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 0$.

10. Rezolvați, în funcție de numărul real m, următoarele ecuații cu necunoscuta x ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x^2 - mx + 3(m - 3) = 0$; b) $x^2 + x - m^2 + 3m - 2 = 0$;
c) $x^2 - 2mx + m^2 - 9 = 0$; d) $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$, $m \neq 0$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
c) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$; d) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$.

CAPITOLUL III
FUNCȚII

III.1. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

O funcție este un triplet (A, B, f), unde A și B sunt mulțimi nevide, iar f este o corespondență între elementele acestor mulțimi prin care *fiecărui* element din A i se asociază *un singur* element din B. Scriem $f : A \to B$.

Mulțimea A se numește **domeniul** (**de definiție** al) funcției, iar B se numește **codomeniul** funcției. Relația $f(x) = y$ arată că valoarea funcției în $x \in A$ este $y \in B$; f se numește **legea de corespondență** a funcției și poate fi dată **sintetic** (prin descriere-text, diagrame, tabele etc.) sau **analitic** (printr-o formulă).

Două funcții se numesc **egale** dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de corespondență.

Dacă $f : A \to B$ este o funcție, atunci **mulțimea valorilor** (**imaginea**) lui f este:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. a) Se consideră șirul de numere naturale 2, 5, 8, 11, 14, ... și funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n - 1$. Arătați că primii cinci termeni ai șirului sunt $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$. Care este al 100-lea termen al șirului? Dar la 1234-lea?

b) Se consideră șirul de numere naturale 0, 3, 8, 15, 24, ... Identificați o funcție $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, astfel încât primii cinci termeni ai șirului să fie $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$. Care este al 100-lea termen al șirului?

Soluție: a) Avem $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 14$, $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$, $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$. Al 100-lea termen al șirului este $f(100) = 3 \cdot 100 - 1 = 299$, iar al 1234-lea este $3 \cdot 1234 - 1 = 3701$.

b) Funcția $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $g(n) = n^2 - 1$ are proprietatea că $g(1) = 1^2 - 1 = 0$, $g(2) = 2^2 - 1 = 3$, $g(3) = 3^2 - 1 = 8$, $g(4) = 4^2 - 1 = 15$ și $g(5) = 5^2 - 1 = 24$. Al 100-lea termen al șirului este $g(100) = 100^2 - 1 = 9999$.

2. Considerăm funcția f care asociază fiecărui număr natural n – ultima cifră din scrierea zecimală a numărului 3^n. Determinați domeniul de definiție al funcției f, precum și codomeniul său, știind că acesta din urmă are cardinalul minim posibil.

Soluție: Este clar că domeniul de definiție este mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Deoarece $u(3^{4k}) = u(81^k) = 1$, rezultă că $u(3^{4k+1}) = 3$, $u(3^{4k+2}) = 9$ și $u(3^{4k+3}) = 7$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Din teorema împărțirii cu rest, orice număr natural se scrie sub una din formele $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ sau $4k + 3$. În concluzie, codomeniul (minimal) este $\{1, 3, 7, 9\}$.

3. Un robinet umple cu apă un rezervor având capacitatea de 1000 ℓ. Volumul de apă, în litri, care se află în rezervor la un moment dat este direct proporțional cu timpul scurs de la deschiderea robinetului, în minute, raportul de proporționalitate fiind egal cu 10. Determinați funcția care dă volumul de apă din rezervor.

Soluție: Notăm cu $\mathscr{V}$ volumul de apă, în litri, care se află în rezervor la un moment dat și cu t timpul scurs de la deschiderea robinetului, în minute. Din enunț știm că $\frac{\mathscr{V}}{t} =$ $= 10$, prin urmare $\mathscr{V} = 10t$. Observăm și că $t_{\max} = 100$, pentru că rezervorul se umple după 100 de minute. Funcția cerută de problemă este $\mathscr{V}: [0, 100] \to \mathbb{R}$, $\mathscr{V}(t) = 10t$.

PROBLEME PROPUSE

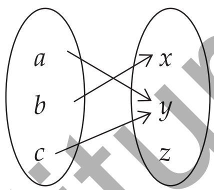
1. Considerăm A = mulțimea județelor României; B = mulțimea orașelor din România.

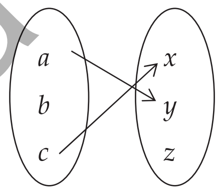
a) Corespondența $f: A \to B$, care asociază fiecărui județ orașele din acel județ, definește o funcție?

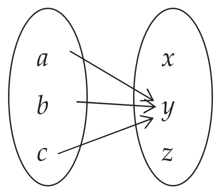
b) Corespondența $g: A \to B$, care asociază fiecărui județ reședința sa, definește o funcție? Aflați g(Argeș), g(Cluj), g(Maramureș), g(Vrancea).

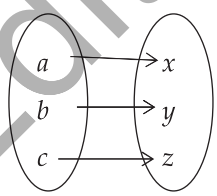
c) Corespondența h: $B \to A$ care asociază fiecărui oraș județul în care se află, definește o funcție? Aflați h(Bârlad); h(Huși); h(Petroșani); h(Deva); h(Orăștie).

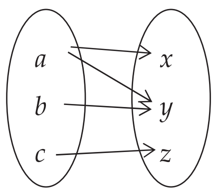
2. În care dintre diagramele de mai jos este reprezentată o funcție și în care nu? Justificați răspunsul!

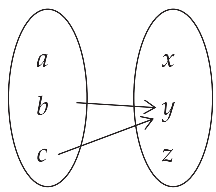
a)


b)


c)


d)


e)


f)


3. Pentru fiecare dintre următoarele funcții, precizați domeniul de definiție și codomeniul:

21. Determinați toate funcțiile $f:\{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ cu proprietatea că:

a) $f(a) < f(b)$; b) $f(b) + f(c) = 4$.

22. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1, 2, 3, ..., 10\} \to \{0, 1\}$ cu proprietatea că:

a) $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 10$; b) $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 1$.

23. Scrieți legea de mișcare a unui mobil care pleacă de la kilometrul 0 și se deplasează cu viteza constantă de 70 km/h. Cum se modifică această lege dacă mobilul pleacă de la kilometrul 50?

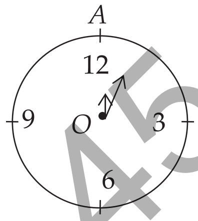


Fig. 1

24. Notăm cu O centrul cadranului unui ceas și cu A punctul corespunzător orei 12:00 (figura 1). Fie $u(t)$ unghiul dintre minutar și semidreapta OA la momentul t (exprimat în minute, începând cu ora 12:00). Exprimați $u(t)$ când $t \in [0, 30]$.

25. Un fabricant de mașini de spălat are costuri fixe anuale de 10000000 de lei, la care se adaugă câte 400 de lei pentru fiecare mașină de spălat produsă. Prețul cu care vinde fabricantul o mașină de spălat este de 800 de lei. Notăm cu $f(n)$ suma (în lei) cheltuită pentru producerea a n mașini de spălat și cu $g(n)$ suma (în lei) ce revine ca beneficiu fabricantului după ce vinde cele n mașini.

a) Calculați $f(20000)$, $f(30000)$, $f(40000)$ și apoi demonstrați că $f(n) = 10000000 + 400n$.

b) Arătați că $g(20000) < 0$ și $g(30000) > 0$. Cum interpretați aceste rezultate?

c) Rezolvați inecuația $g(n) > 0$ și explicați ce reprezintă soluțiile acestei inecuații.

III.2. Graficul unei funcții

Graficul funcției $f: A \to B$ este: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$.

Rețineți!

1) G_f are la fel de multe elemente ca domeniul A al funcției.

2) $M(a, b) \in G_f \Leftrightarrow a \in A$ și $f(a) = b$.

3) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$, spunem că f este o **funcție numerică**. În acest caz, putem reprezenta geometric graficul funcției în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy. Mulțimea de puncte ale planului care se obține va fi numită, de obicei, tot graficul funcției f.

Probleme rezolvate

1. Fie funcția $f:\{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1000} - x + 1$.

a) Determinați graficul funcției ca submulțime a produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Reprezentați geometric G_f în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Calculați $f(0)+f(2)$.

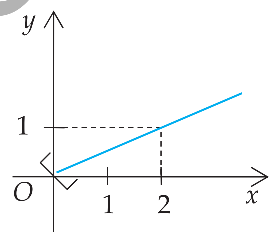
(1p) **2.** Arătați că punctul $A(3, 2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{2}$.

(1p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)\geq f(-1)$.

(1p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-2x$. Aflați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele Ox și Oy.

(1p) **5.** Considerăm seria de date statistice 5, 2, 4, 2, 3, 2. Comparați media seriei cu mediana seriei.

(1p) **6.** Determinați funcția f al cărei grafic este reprezentat în figura alăturată.



7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-2$.

(1p) **a)** Reprezentați grafic funcția, în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy.

(1p) **b)** Determinați măsura unghiului pe care graficul funcției f îl formează cu axa Ox.

(1p) **c)** Calculați distanța de la punctul $C(-3, 0)$ la graficul funcției f.

TESTUL 2

(1p) **1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Calculați media aritmetică a numerelor $f(-2)$ și $f(0)$.

(1p) **2.** Determinați abscisa punctului de pe graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -3x+2$, care are ordonata egală cu -1.

(1p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(a-2)+f(a)+f(a+1)=8$.

(1p) **4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Determinați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $\frac{6}{f(n)}$ este număr întreg.

CAPITOLUL IV
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

IV.1. Puncte. Drepte. Plane

1. Punctul, **dreapta** și **planul** sunt noțiunile fundamentale (de bază) ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni abstracte (nu există în realitatea concretă, ci doar în imaginația noastră) și primare (nu depind de alte noțiuni cunoscute, înțelegerea lor întemeindu-se pe intuiție, pe comparație și pe transpunerea în viața practică).

Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe o foaie de hârtie de un creion ascuțit. Punctul nu are dimensiuni, nu poate fi confundat cu o bulină.

Dreapta este comparabilă cu un fir de ață bine întins, imaginat ca nesfârșit de lung, dar, spre deosebire de acesta, nu are grosime. Dreapta este o mulțime de puncte.

Planul este comparabil cu suprafața unei mese, nemărginită în toate direcțiile. Planul nu are grosime, conține drepte și este o mulțime de puncte.

În figura 1 sunt desenate un punct A, o dreaptă d și un plan α.

Fig. 1

De obicei, notăm punctele cu litere mari și dreptele cu litere mici din alfabetul latin, iar planele cu litere mici din alfabetul grec.

Planul, deși este nemărginit, îl reprezentăm printr-o porțiune dreptunghiulară a sa care, în perspectivă, va apărea ca un paralelogram.

2. Propoziții despre puncte, drepte, plane

P1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una; orice dreaptă conține cel puțin două puncte.

Dacă punctele distincte A și B aparțin dreptei d, atunci notăm dreapta d cu AB sau BA:

$A, B \in d, A \neq B \Rightarrow d = AB = BA$.

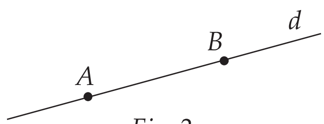


Fig. 2

Spunem că două puncte distincte **determină** o dreaptă.

În figura 3, punctele distincte A, B, C aparțin dreptei d, iar punctul D nu aparține dreptei d.

Avem: $A, B, C \in d$, $D \notin d$; $d = AB$, $d = AC$ etc.

Punctele A, B, C sunt coliniare, iar punctele A, B, D sunt necoliniare.

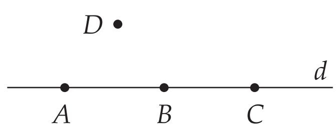


Fig. 3

P2. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la dreapta dată (**Axioma lui Euclid sau axioma paralelelor**). Acceptăm deci, implicit, că două drepte paralele sunt în același plan.

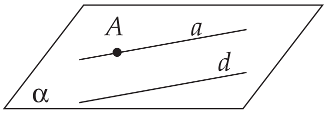


Fig. 4

Dacă $A \notin d$, există o unică dreaptă a, astfel încât $A \in a$ și $a \parallel d$; dreptele a și d se află în același plan (figura 4).

P3. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină; într-un plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

Dacă punctele necoliniare A, B, C aparțin planului α, atunci notăm planul α cu (ABC) sau (ACB) sau (BAC) etc.

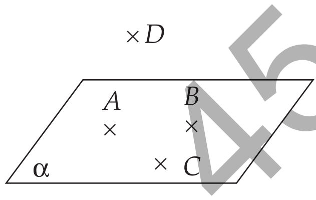


Fig. 5

Spunem că trei puncte necoliniare **determină** un plan.

În figura 5, punctele necoliniare A, B, C aparțin planului α, iar punctul D nu aparține planului α.

Avem $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$; $\alpha = (ABC)$, $\alpha = (ACB)$, $\alpha = (BAC)$ etc.

Spunem că punctele A, B, C sunt **coplanare**, iar punctele A, B, C, D sunt **necoplanare**.

P4. Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în acel plan.

$A, B \in \alpha$, $A \neq B \Rightarrow AB \subset \alpha$ (figura 6).

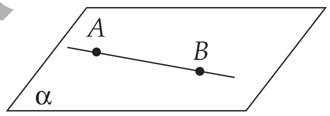


Fig. 6

P5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

$A \in \alpha \cap \beta$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$ $(A \in d)$ (figura 7).

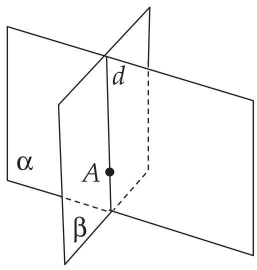


Fig. 7

3. Determinarea planului

I. Trei puncte necoliniare determină un plan.

Dacă A, B, C sunt necoliniare și $A, B, C \in \alpha$, atunci $\alpha = (ABC)$ (figura 8).

II. O dreaptă și un punct exterior ei determină un plan.

Dacă $A \notin d$ și $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, atunci $\alpha = (A, d)$ (figura 9).

III. Două drepte concurente determină un plan.

Dacă $a \cap b = \{O\}$ și $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 10).

IV. Două drepte paralele determină un plan.

Dacă $a \parallel b$ și $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 11).

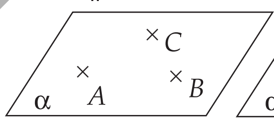


Fig. 8

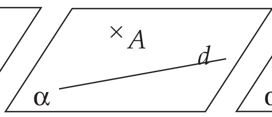


Fig. 9

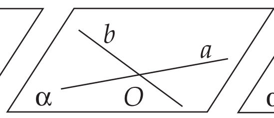


Fig. 10

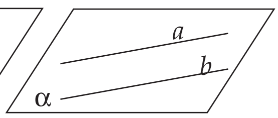
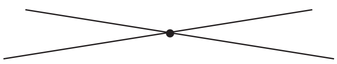


Fig. 11

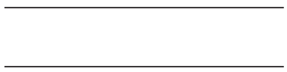
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Știm deja că, în plan, două drepte distincte pot fi concurente sau paralele.

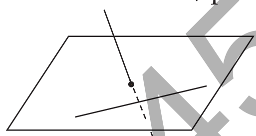
În spațiu, există drepte care, deși nu sunt paralele, nu au niciun punct comun (de exemplu, un om care stă drept, în mijlocul unei camere, având podeaua dreptunghiulară, ar putea sugera o dreaptă care nu este nici paralelă, nici nu are vreun punct comun cu una dintre marginile podelei). Două astfel de drepte se numesc necoplanare. Prin urmare, în spațiu, două drepte distincte pot fi: concurente, paralele sau necoplanare.



drepte concurente



drepte paralele



drepte necoplanare

Reamintim că două drepte concurente sau paralele sunt coplanare.

Probleme rezolvate

1. În figura 12 este reprezentat un plan α, trei puncte necoliniare, A, B, C, ce aparțin planului α și un punct D, exterior planului.

a) Stabiliți poziția dreptei AB față de planul α.

b) Arătați că punctele A, B, D determină un plan și găsiți intersecția acestuia cu planul α.

c) Care este poziția relativă a dreptelor AD și BC?

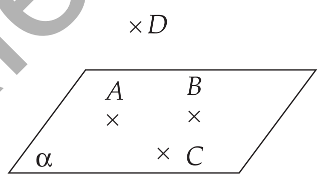


Fig. 12

Soluție: a) Deoarece punctele A și B sunt diferite și aparțin planului α, rezultă, conform propoziției P4, că dreapta AB este inclusă în planul α.

b) Punctele A, B, D sunt necoliniare, deoarece, în caz contrar, din relațiile $D \in AB$ și $AB \subset \alpha$, am obține $D \in \alpha$, fals. Așadar, punctele A, B, D determină un plan și $(ABD) \cap \alpha = AB$.

c) Dreptele AD și BC nu pot fi paralele sau concurente, pentru că atunci ele ar fi coplanare și asta ar însemna că D aparține planului α, ceea ce este fals. Prin urmare, dreptele AD și BC sunt necoplanare.

2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare (figura 13).

a) Demonstrați că oricare trei dintre aceste puncte sunt necoliniare.

b) Câte plane, care conțin cel puțin trei dintre punctele A, B, C, D există?

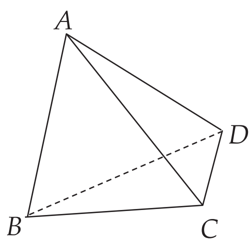


Fig. 13

Soluție: a) În primul rând, observăm că punctele A, B, C, D trebuie să fie distincte, căci, în caz contrar, ele ar fi coplanare. Dacă, de exemplu, A, B, C ar fi coliniare, atunci dreapta determinată de ele și punctul D ar aparține unui plan, deci punctele A, B, C, D ar fi coplanare, fals. Prin urmare, punctele A, B, C, D sunt coplanare.

b) Sunt patru plane: (ABC), (ABD), (ACD) și (BCD).

3. Considerăm patru puncte necoplanare A, B, C, D. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$ și $\{E\} = MN \cap BC$, $\{F\} = NP \cap CD$, $\{G\} = MP \cap BD$ (figura 14). Demonstrați că punctele E, F și G sunt coliniare.

Soluție: Fie d dreapta de intersecție a planelor (BCD) și (MNP). Cum $E \in BC$ și $BC \subset (BCD)$, rezultă că $E \in (BCD)$. Din relațiile $E \in MN$ și $MN \subset (MNP)$, deducem că $E \in (MNP)$. Așadar $E \in d = (BCD) \cap (MNP)$. Analog arătăm că F și G aparțin dreptei d. Prin urmare, punctele E, F și G sunt coliniare, pentru că toate se află pe dreapta d.

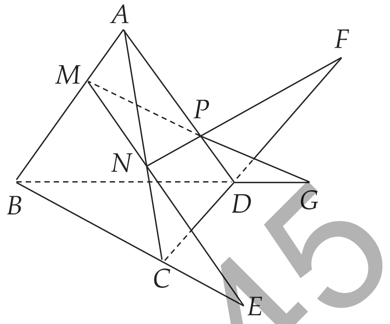


Fig. 14

PROBLEME PROPUSE

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = DB$. Calculați $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

2. În figura 15, punctele B și C aparțin planului α, iar punctul A nu aparține planului α. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

P_1: $BC \subset \alpha$; P_2: $AB \subset \alpha$; P_3: punctele A, B, C determină un plan.

3. În figura 16, punctele necoliniare A, B, O aparțin planului α, punctul C este exterior planului α și punctul O se află pe segmentul (CD).

a) Stabiliți poziția relativă a dreptelor AB și CD și poziția punctului D față de planul α.

b) Determinați $(ABC) \cap \alpha$.

c) Determinați $(ACD) \cap (BOC)$.

4. În figura 17, dreptele a și b sunt paralele și $A, B \in a$, $C, D \in b$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctul P nu aparține planului determinat de dreapta a și punctul C. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

P_1: O aparține planului (a, b), determinat de dreptele a și b;

P_2: $P \in (a, b)$; P_3: $(PAC) \cap (PBD) = PO$;

P_4: Intersecția planelor (PAB) și (PCD) este o dreaptă.

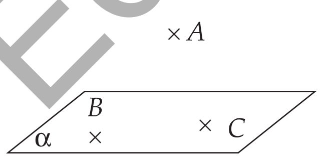


Fig. 15

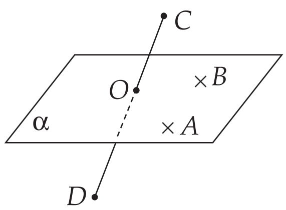


Fig. 16

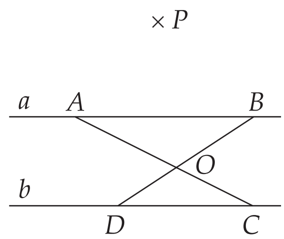


Fig. 17

IV.2. PIRAMIDA

1. O piramidă regulată are baza un poligon regulat și muchiile laterale congruente.

2. Piramida triunghiulară regulată

În figura 1 este desenată o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu baza triunghiul echilateral ABC și fețele laterale triunghiurile isoscele congruente VAB, VBC, VCA, iar în figura 2 este un exemplu de desfășurare plană a suprafeței piramidei considerate.

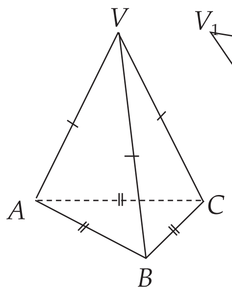


Fig. 1

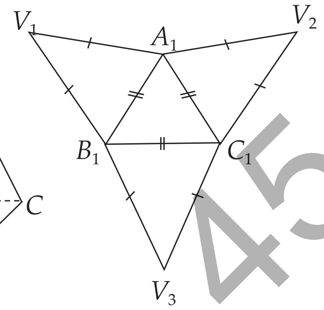


Fig. 2

3. Piramida patrulateră regulată

În figura 3 este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și fețele laterale triunghiurile isoscele congruente VAB, VBC, VCD, VDA, iar în figura 4 este un exemplu de desfășurare plană a piramidei $VABD$.

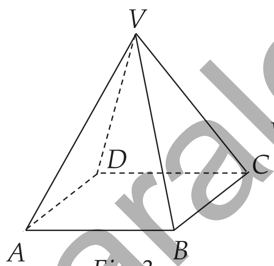


Fig. 3

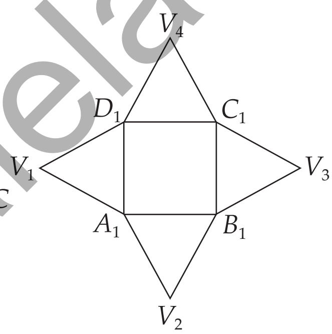


Fig. 4

4. Piramida hexagonală regulată

În figura 5 este desenată o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$ și fețele laterale triunghiurile isoscele congruente VAB, VBC, VCD, VDE, VEF și VFA, iar în figura 6 este un exemplu de desfășurare plană a suprafeței piramidei $VABDEF$.

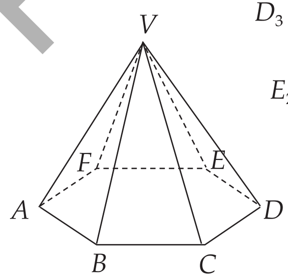


Fig. 5

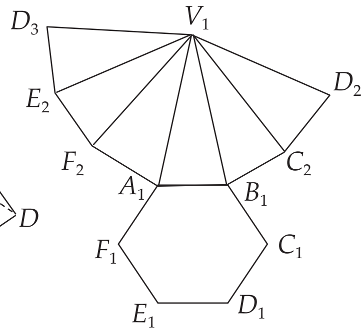


Fig. 6

5. O piramidă triunghiulară se mai numește și **tetraedru**. Un tetraedru cu toate muchiile egale se numește **tetraedru regulat**. În figura 7 este desenat tetraedrul regulat $ABCD$ ($AB = AC = AD = BC = CD = DB$)

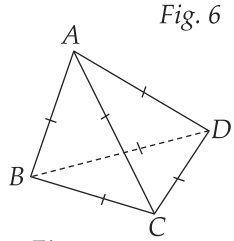


Fig. 7

24. Un con circular drept are înălțimea $VO = 8$ cm și raza $R = 6$ cm. Triunghiul VAB este o secțiune axială a conului (fig. 14). Aflați sinusul unghiului format de generatoarele VA și VB.

25. Un trunchi de con circular drept are înălțimea $OO' = 4$ cm, raza bazei mari $R = 3\sqrt{3}$ cm și raza bazei mici $r = \sqrt{3}$ cm. Determinați măsura unghiului dintre diagonalele AB' și BA' ale secțiunii axiale $ABB'A'$ (fig. 15).

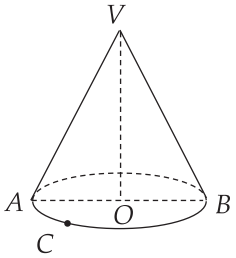


Fig. 13

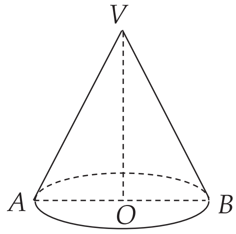


Fig. 14

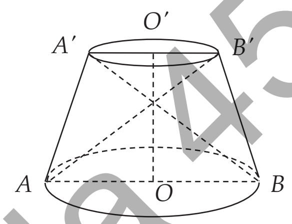
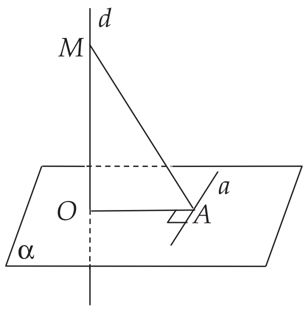


Fig. 15

IV.14. Teorema celor trei perpendiculare

Teorema celor trei perpendiculare (T3⊥)

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha,\ d \cap \alpha = \{O\} \\ a \subset \alpha,\ O \notin a \\ OA \perp a,\ A \in a \\ M \in d \setminus \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow MA \perp a$$



Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare (R_1T3⊥)

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha,\ d \cap \alpha = \{O\} \\ a \subset \alpha,\ O \notin \alpha \\ M \in d \setminus \{O\} \\ MA \perp a,\ A \in a \end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp a$$

A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare (R_2T3⊥)

$$\left.\begin{array}{l} d \cap \alpha = \{O\},\ M \in d \setminus \{O\} \\ a \subset \alpha,\ O \notin \alpha \\ OA \perp a,\ A \in a \\ MO \perp OA \\ MA \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$

Observație. În probleme, folosim T3⊥ pentru a determina distanța de la un punct la o dreaptă și R_2T3⊥ pentru a determina distanța de la un punct la un plan.

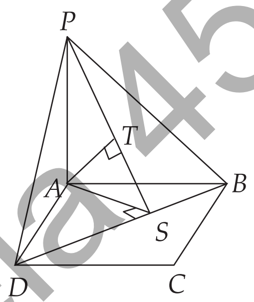
Probleme rezolvate

1. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AD = 6$ cm, se ridică perpendiculara AP având lungimea $AP = 3$ cm. Determinați:

a) d(P, BC);

b) d(P, BD);

c) d(A, (PBD)).



Soluție: a) Din relațiile $PA \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ și $AB \perp BC$ deducem, conform T3⊥, că $PB \perp BC$, deci d(P, BC) = PB. În triunghiul PAB, $\sphericalangle A = 90°$, obținem, conform teoremei lui Pitagora, că $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2} = 3\sqrt{13}$ cm.

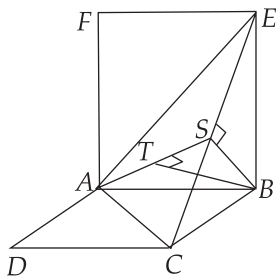
b) Fie $AS \perp BD$, $S \in BD$. Ținând cont că $PA \perp (ABD)$, $BD \subset (ABD)$, $AS \perp BD$, obținem, conform T3⊥, că $PS \perp BD$, deci d(P, BD) = PS. Din triunghiul BAD, $\sphericalangle A = 90°$, deducem că $BD = \sqrt{BA^2 + AD^2} = 12$ cm, iar $AS = \dfrac{AB \cdot AD}{BD} = 3\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul PAS, $\sphericalangle A = 90°$, obținem, conform teoremei lui Pitagora, că $PS = \sqrt{PA^2 + AS^2} = 6$ cm.

c) Construim $AT \perp PS$, $T \in PS$. Din relațiile $AT \perp PS$, $PS \perp BD$, $AS \perp BD$, $PS \subset (PBD)$ deducem, conform R_2T3⊥, că $AT \perp (BPD)$, deci d(A, (PBD)) = AT. Din triunghiul PAS, $\sphericalangle A = 90°$, obținem că $AT = \dfrac{AP \cdot AS}{PS} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

2. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Se știe că $AB = 10$ cm, $BC = 30$ cm și $BE = 40$ cm. Determinați:

a) d(A, CE);

b) d(B, (ACE)).



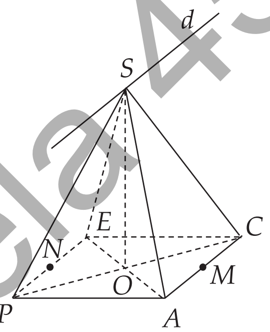
Soluție: a) Cum $AB \perp BC$ și $AB \perp BE$, rezultă că $AB \perp (BCE)$. Ducem $BS \perp CE$, $S \in CE$ și, din T3⊥, deducem că $AS \perp CE$, așadar d(A, CE) = AS. Din $(ABC) \perp (ABE)$, $(ABC) \cap (ABE) = AB$ și $EB \perp AB$, obținem că $EB \perp (ABC)$, prin urmare $EB \perp BC$. În triunghiul dreptunghic BCE, $\sphericalangle CBE = 90°$, avem $BS = \dfrac{BC \cdot BE}{CE} = \dfrac{30 \cdot 40}{50} = 24$ cm. Din triunghiul dreptunghic ABS, $\sphericalangle ABS = 90°$, găsim $AS = \sqrt{AB^2 + BS^2} = 26$ cm.

b) Ducem $BT \perp AS$, $T \in AS$. Cum $AS \perp CE$ și $BS \perp CE$, din R_2T3⊥, rezultă că $BT \perp (ACE)$, deci d(B, (ACE)) = $BT = \dfrac{BS \cdot BA}{AS} = \dfrac{240}{13}$ cm.

CAPITOLUL V
ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

V.1. CALCULUL UNOR DISTANŢE ŞI A UNOR MĂSURI DE UNGHIURI ÎN CORPURILE STUDIATE

PROBLEME REZOLVATE



1. Piramida patrulateră regulată *SPACE* are toate muchiile de lungime a, $a > 0$.

a) Aflați măsura unghiului format de dreapta *SP* cu planul (*SAE*).

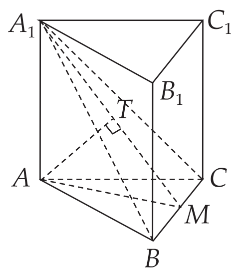
b) Calculați distanța de la punctul *A* la planul (*SPE*).

c) Determinați sinusul unghiului format de planele (*SAC*) și (*SPE*).

Soluție: a) Deoarece $\text{pr}_{(SAE)} PS = OS$, rezultă că $\sphericalangle(SP, (SAE)) = \sphericalangle PSO$, unde O este centrul bazei. Întrucât *PACE* este pătrat, rezultă că $PO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ și atunci, din triunghiul *POS*, $\sphericalangle O = 90°$, obținem că măsura unghiului *PSO* este egală cu 45°.

b) Fie M, N mijloacele segmentelor AC, respectiv PE. Avem $AC \parallel (SPE)$, deci $d(A, (SPE)) = d(M, (SPE))$. Construim $MQ \perp SN$, $Q \in SN$. Ținând cont că $PE \perp SN$ și $PE \perp MN$, rezultă că $PE \perp (SMN)$, deci $PE \perp MQ$. Așadar, $MQ \perp SN$, $MQ \perp PE$, deci $MQ \perp (SPE)$, iar $d(M, (SPE)) = MQ$. Din triunghiul *SMN* va rezulta $\dfrac{MN \cdot SO}{2} = \dfrac{MQ \cdot SN}{2}$, deci $MQ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

c) Fie $d = (SPE) \cap (SAC)$. Deoarece $AC \parallel PE$, rezultă că $d \parallel AC \parallel PE$. Întrucât triunghiurile *SAC* și *SPE* sunt echilaterale, rezultă că $SM \perp AC$, $SN \perp PE$, deci unghiul dintre planele (*SAC*) și (*SPE*) este unghiul *MSN*. Din triunghiul *MSN*, exprimând aria în două moduri, vom obține că $\sin(\sphericalangle MSN) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



2. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ având $AB = 6$ cm și $AA_1 = 6\sqrt{3}$ cm.

a) Aflați distanța de la punctul A_1 la dreapta BC.

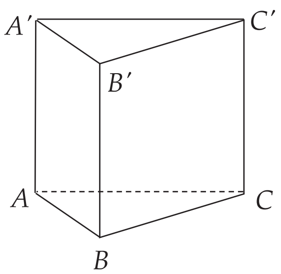
b) Aflați distanța de la punctul A la planul (A_1BC).

c) Aflați măsura unghiului dintre dreptele AB_1 și CC_1.

V.2. Prisma

Convenții de desen. Notații

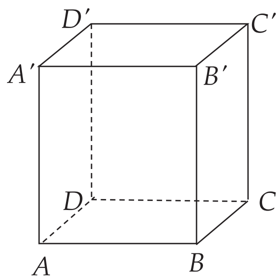
Prismă triunghiulară regulată



$\mathcal{P}_b = 3 \cdot AB;$

$\mathcal{A}_b = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}.$

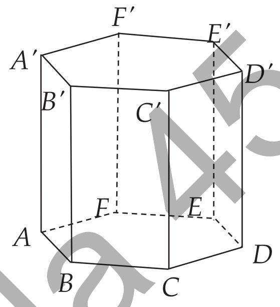
Prismă patrulateră regulată



$\mathcal{P}_b = 4 \cdot AB;$

$\mathcal{A}_b = AB^2.$

Prismă hexagonală regulată



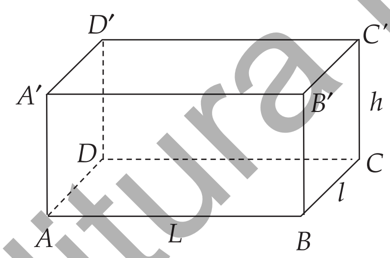
$\mathcal{P}_b = 6 \cdot AB;$

$\mathcal{A}_b = 6 \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}.$

Aria și volumul unei prisme

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h;\ \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b;\ \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$$

Paralelipiped dreptunghic

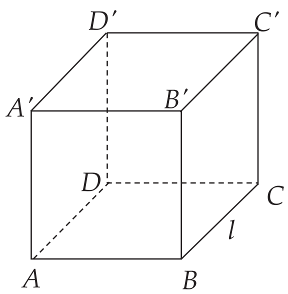


$\mathcal{A}_l = 2(L + l) \cdot h;$

$\mathcal{A}_t = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h);$

$\mathcal{V} = L \cdot l \cdot h.$

Cub



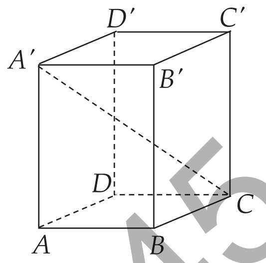
$\mathcal{A}_l = 4l^2;$

$\mathcal{A}_t = 6l^2;$

$\mathcal{V} = l^3.$

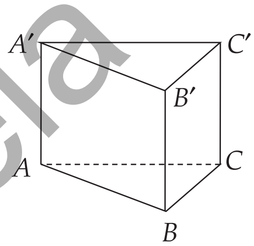
PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care AB = 10 cm. Aflați aria laterală și volumul prismei, știind că diagonala $A'C$ formează cu planul (ABB') un unghi cu măsura de 30°.



Soluție: Deoarece $\text{pr}_{(ABC)}\, A'C = A'B$, rezultă că $\sphericalangle(A'C, (ABB')) = \sphericalangle CA'B$. Din triunghiul $A'BC$, $\sphericalangle B = 90°$, rezultă, conform teoremei 30–60–90, că $A'C = 20$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $A'AB$, vom obține că $AA' = 10\sqrt{2}$ cm. În aceste condiții, $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 400\sqrt{2}$ cm^2 și $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 1000\sqrt{2}$ cm^3.

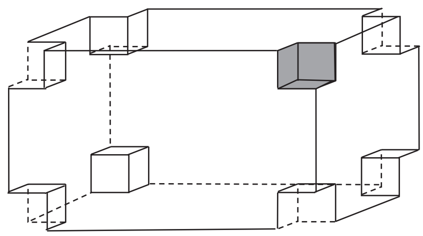
2. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = 2AA'$ și suma lungimilor muchiilor este egală cu 90 cm. Aflați aria totală și volumul prismei.



Soluție: Deoarece $AB = 2AA'$, obținem că suma lungimilor muchiilor va fi $6 \cdot AB + 3 \cdot AA' = 15 \cdot AA' = 90$ cm, deci $AA' = 6$ cm, iar $AB = 12$ cm. Atunci $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 216$ cm^2, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 72\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm^2 și $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 216\sqrt{3}$ cm^3.

3. O piesă se obține dintr-un paralelipiped dreptunghic prin îndepărtarea din fiecare vârf a câte unui cub. Dimensiunile paralepedului sunt egale cu 5 cm, 6 cm și 8 cm, iar latura cuburilor este egală cu 2 cm. Aflați:

a) volumul piesei; b) aria piesei.

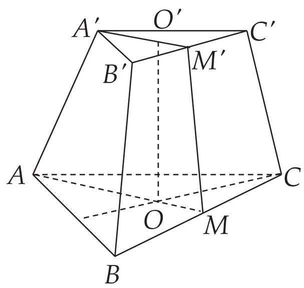


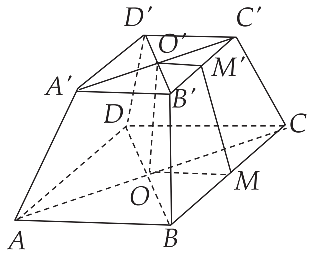
Soluție: Volumul paralelipipedului este $\mathcal{V}_{\text{par.}} = L \cdot l \cdot h = 240$ cm^2, iar volumul fiecăruia dintre cele opt cubulețe care se elimină este $\mathcal{V}_{\text{cub}} = 8$ cm^3. Volumul piesei va fi $\mathcal{V}_{\text{piesă}} = \mathcal{V}_{\text{par.}} - 8\mathcal{V}_{\text{cub}} = 176$ cm^3. Când calculăm însă aria nu vom mai scădea $\mathcal{A}_{\text{par.}} - 8\mathcal{A}_{\text{cub}}$, cum poate că ar fi tentat să procedeze cineva neatent. Să urmărim, de exemplu, colțul dreapta-față-sus: se „pierd” trei pătrate de latură 2 cm, dar se „câștigă” trei noi pătrate de latură 2 cm (cele hașurate). Prin urmare, în acest caz, aria piesei va fi egală cu aria paralelipipedului, anume $\mathcal{A} = 236$ cm^2.

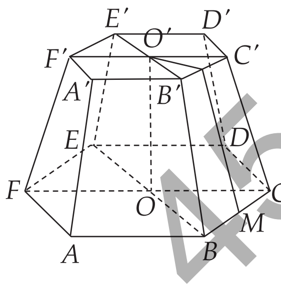
În astfel de situații, recomandăm a nu se urmări aplicarea unor „rețete”, „formule”; este preferabil să vedem din ce este formată suprafața piesei obținute și să adunăm ariile tuturor poligoanelor găsite.

V.4. TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

Convenții de desen







Trunchiul de piramidă regulată se obține în urma secționării unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza, eliminând piramida ce se formează în vârf. Înălțimea unui astfel de trunchi unește centrele celor două baze.

Notații: $MM' = a$ – apotema trunchiului;
$OO' = h$ – înălțimea trunchiului.

Observație: Remarcăm că în notațiile indicate a și h nu reprezintă apotema, respectiv înălțimea piramidei mici formate.

Aria și volumul unui trunchi de piramidă regulată

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b;\ \mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a}{2};\ \mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$$

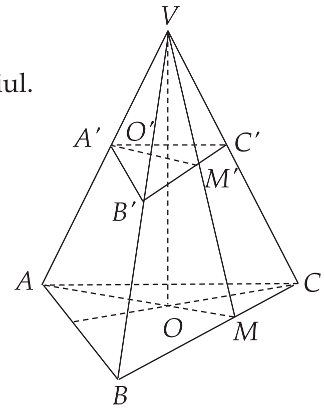
PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchiile bazelor $AB = 8$ cm, $A'B' = 6$ cm și înălțimea $OO' = 4$ cm.

a) Calculați volumul trunchiului.

b) Aflați volumul piramidei din care provine trunchiul.

c) Determinați aria totală a trunchiului.



Soluție: a) Folosind formula, obținem că:

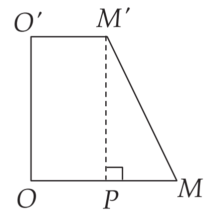
$$\mathcal{V}_{\text{tr.}} = \frac{OO'}{3}\left(\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{A'B'C'} + \sqrt{\mathcal{A}_{ABC}\cdot\mathcal{A}_{A'B'C'}}\right) =$$

$$= \frac{OO'}{3}\left(\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} + \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} + \frac{AB\cdot A'B'\cdot\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) = \frac{148\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3.$$

b) Din asemănarea piramidei $VA'B'C'$ cu piramida mare $VABC$, obținem că $\frac{\mathcal{V}_{\text{pir. mică}}}{\mathcal{V}_{\text{pir. mare}}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3 = \frac{27}{64}$. Atunci $\frac{\mathcal{V}_{\text{tr.}}}{\mathcal{V}_{\text{pir. mare}}} = \frac{64-27}{64} = \frac{37}{64}$, de unde $\mathcal{V}_{\text{pir. mare}} = \frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm^3.

c) Avem $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, iar $O'M' = \frac{1}{3}A'M' =$ $= \frac{1}{3}\cdot\frac{A'B'\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm, așadar $MP = OM - O'M' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm (unde am notat cu P proiecția lui M' pe OM). Folosind teorema lui Pitagora în $\Delta PMM'$, găsim că apotema trunchiului are lungimea $MM' = \sqrt{PM^2 + PM'^2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. Rezultă că $\mathcal{A}_{l\,\text{tr.}} = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot MM'}{2} = 49\sqrt{3}$ cm^2, prin urmare, $\mathcal{A}_{t\,\text{tr.}} = \mathcal{A}_{l\,\text{tr.}} + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = 49\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 74\sqrt{3}$ cm^2.

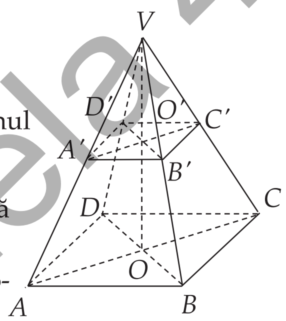


2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care $AB = 16$ cm, $A'B' = 4$ cm și volumul trunchiului este egal cu 672 cm^3.

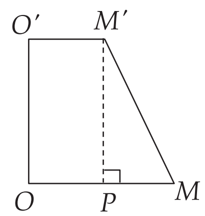
a) Calculați aria totală a trunchiului.

b) Aflați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

c) Aflați măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei mici.



Soluție: a) Deoarece $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = \frac{OO'}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$, rezultă că $\frac{OO'}{3}(AB^2 + A'B'^2 + AB\cdot A'B') = 672$, deci $OO' = 6$ cm. Fie P proiecția punctului M' pe OM. Deoarece $OM = \frac{AB}{2} = 8$ cm, $O'M' =$ $= \frac{A'B'}{2} = 2$ cm, $OO' = M'P = 6$ cm, rezultă că $MM' = \sqrt{MP^2 + PM^2} =$ $= 6\sqrt{2}$ cm. Atunci $\mathcal{A}_{l\,\text{tr.}} = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot MM'}{2} = 240\sqrt{2}$ cm^2; $\mathcal{A}_{t\,\text{tr.}} = \mathcal{A}_{l\,\text{tr.}} +$ $+ \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = 240\sqrt{2}$ cm$^2 + 272$ cm$^2 = 16\left(15\sqrt{2} + 17\right)$ cm^2.



b) Deoarece $O'A' \parallel OA$, rezultă că $\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$, deci $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'A}{OA}$, de unde obținem că $VO = 8$ cm.

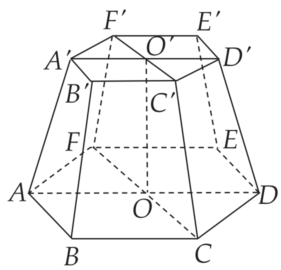
c) Determinăm măsura unghiului format de planele (BCC') și (ABC). Deoarece $(BCC') \cap$ $\cap (ABC) = BC$, $MM' \perp BC$, $MM' \subset (BCC')$, $OM \perp BC$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă că unghiul căutat este $M'MO$. Din triunghiul dreptunghic isoscel $M'PM$ deducem că $\sphericalangle M'MP = 45°$.

3. Fie $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ un trunchi de piramidă hexagonală regulată în care $AB = 10$ cm, $A'B' = 2$ cm și $BE' = 6\sqrt{5}$ cm.

a) Aflați înălțimea trunchiului de piramidă.

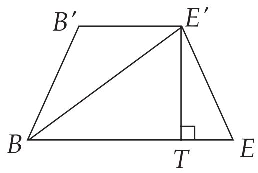
b) Determinați volumul trunchiului de piramidă.

c) Calculați aria laterală a trunchiului de piramidă.

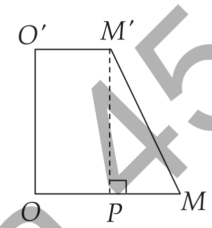


Soluție: a) În cele două baze, BE și $B'E'$ sunt diagonale „mari”, deci $BE = 20$ cm și $B'E' = 4$ cm. Fie $E'T \perp BE$, $T \in BE$. Atunci

$TE = \dfrac{BE - B'E'}{2} =$ 8 cm, deci BT = 12 cm și, conform teoremei lui Pitagora, $E'T = \sqrt{BE'^2 - BT^2} = 6$ cm. Așadar, $OO' = 6$ cm.



b) $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = \dfrac{OO'}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right) = \dfrac{OO'}{3}\left(6 \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} +\right.$ $\left.+\ 6 \cdot \dfrac{AB \cdot A'B'\sqrt{3}}{4}\right) = 372\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$



c) Fie M mijlocul CD și M' mijlocul $C'D'$. Deoarece triunghiurile COD și $C'O'D'$ sunt echilaterale, rezultă că $OM = 5\sqrt{3}$ cm și $O'M' = \sqrt{3}$. Dacă $M'P \perp OM$, $P \in OM$, atunci $MM' =$ $= 2\sqrt{21}$ cm. În concluzie, $\mathcal{A}_{l\ \text{tr.}} = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot MM'}{2} = 72\sqrt{21}\ \text{cm}^2.$

PROBLEME PROPUSE

1. O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile de lungime 8 cm. Secționăm piramida cu un plan paralel cu baza, care trece prin mijlocul înălțimii. Calculați aria totală și volumul trunchiului de piramidă care se obține.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu muchiile bazelor AB = 18 cm, $A'B'$ = 6 cm și având înălțimea $OO' = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați aria laterală și volumul trunchiului.

3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are laturile bazelor AB = 12 cm, $A'B'$ = 4 cm și apotema MM' = 12 cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului;

b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care $AA' =$ $= A'B'$ = 6 cm. Muchia laterală AA' formează cu planul bazei (ABC) un unghi cu măsura de 45°. Calculați volumul trunchiului.

5. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea $OO' =$ $= 6$ cm, latura bazei mari AB = 12 cm și volumul $\mathcal{V} = 378\ \text{cm}^3$.

a) Arătați că $A'B'$ = 3 cm.

b) Calculați aria laterală a trunchiului.

6. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are centrele bazelor O, respectiv O'. Se știe că $AA' \perp OA'$, OA' = 6 cm și $AO = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați volumul trunchiului.

7. O firmă construiește din beton postamentul pentru amplasarea unei statui sub forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Dacă lungimea muchiei laterale

16. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are lungimea muchiei laterale egală cu 15 cm, înălțimea trunchiului reprezintă $\frac{4}{5}$ din lungimea muchiei laterale, iar raza cercului circumscris bazei mici are lungimea de 3 cm. Calculați:

a) volumul trunchiului;

b) aria triunghiului rezultat prin secționarea trunchiului cu un plan paralel cu bazele ce trece prin mijlocul înălțimii.

17. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea $OO' =$ $= 3$ cm, latura bazei mici $A'B' = 6\sqrt{3}$ cm, iar unghiul dintre fața laterală și planul bazei mari are măsura de 45°.

a) Aflați lungimea laturii bazei mari.

b) Determinați aria totală a trunchiului.

c) Găsiți tangenta unghiului dintre muchia laterală și planul bazei mari.

18. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care cunoaștem laturile bazelor $AB = 6$ cm, $A'B' = 3$ cm și $AC' = \sqrt{37}$ cm.

a) Calculați lungimea înălțimii trunchiului.

b) Determinați volumul trunchiului.

c) Aflați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

19. O foaie de tablă are forma unui hexagon regulat $ABCDEF$ cu latura de 20 cm. Notăm cu M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, respectiv EF și îndoim tabla după dreptele MN, NP și PM. Se obține astfel un vas (fără capac) având forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată (fig. 2).

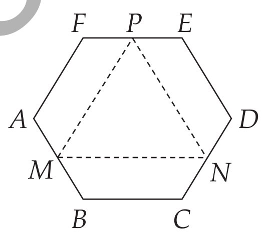


Fig. 2

a) Aflați suprafața foii de tablă folosite pentru confecționarea vasului.

b) Calculați capacitatea vasului.

20. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are laturile bazelor $AB = 18$ cm, $A'B' = 12$ cm și înălțimea $OO' = 3$ cm. Calculați volumul și aria laterală ale trunchiului.

21. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are laturile bazelor $AB = 10$ cm, $A'B' = 2$ cm și aria laterală $\mathcal{A}_l = 252$ cm^2.

a) Aflați volumul trunchiului de piramidă.

b) Calculați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

22. Se consideră $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ un trunchi de piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei mici $A'B' = 6$ cm, apotema $MM' = 4\sqrt{3}$ cm și unghiul format de planul unei fețe laterale cu planul bazei mari cu măsura de 60°.

a) Determinați volumul trunchiului.

b) Aflați distanța de la punctul A la planul (CDD').

CAPITOLUL VI
RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASELE V-VII

VI.1. Numere naturale

1. Determinați:
a) numărul cu 3 mai mare decât 9;
b) numărul cu 3 mai mic decât 9;
c) numărul de 3 ori mai mare decât 9;
d) numărul de 3 ori mai mic decât 9.

2. Calculați:
a) $10 - 2 \cdot 4$;
b) $4005 : 15$;
c) $54 : 3^2 + 11$;
d) $18 - (10 - 8 : 2) \cdot 3$;
e) $20 - 14 \cdot (18 - 9 \cdot 2)$;
f) $222 - 22 \cdot 2 - 22 : 2$.

3. Considerăm numerele a, b, c, d astfel încât $a = 5$, $b - c = 2$ și $d = (2^{11} \cdot 20^{31})^2 : (4^{41} \cdot 10^{62})$.
a) Arătați că $d = 4$.
b) Calculați $a^2 + ab - ac - d^2$.

4. Calculați:
a) $(2^{100} + 2^{101} + 2^{102}) : 2^{100}$;
b) $2^5 \cdot 3^6 : 6^4$;
c) $16^4 : (2 \cdot 4^2 \cdot 8^3)$;
d) $9^4 : (3^6 + 8 \cdot 3^5 - 6 \cdot 3^4)$.

5. Determinați:
a) cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 2020;
b) cel mai mic cub perfect mai mare decât 2020.

6. Determinați numerele de forma $\overline{25a}$ divizibile cu 2, dar care nu se divid cu 3.

7. Determinați numerele $\overline{a7b}$ divizibile cu 5 și cu 9.

8. Determinați numerele naturale a și b, știind că cel mai mare divizor comun al numerelor este 13, iar $17a + b = 351$.

9. Fie a, b, c cifre nenule, diferite două câte două, și $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.
a) Arătați că numărul S este divizibil cu 37.
b) Determinați S, știind că este număr natural de trei cifre.

10. Determinați numerele naturale n, știind că $3n + 1$ îl divide pe 70.

11. Arătați că numărul $a = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{24}$ se divide cu 42.

12. Arătați că numărul $a = 2^{2n} \cdot 7^{n+2} - 28^{n+1} - 4^n \cdot 7^{n+1}$ se divide cu 392 pentru orice număr natural nenul n.

VI.5. Figuri geometrice plane

1. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât $AD = 15$ cm, $BC = 3$ cm și $AB = CD$. Calculați lungimea segmentului AB.

2. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul P este mijlocul segmentului AM. Calculați valoarea raportului $\dfrac{PB}{AM}$.

3. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv CD. Se știe că $MN = 3$ cm, $AN = 7$ cm și $BN = 4$ cm. Calculați lungimile segmentelor AB, BC și CD.

4. Raportul dintre măsura complementului unui unghi și măsura suplementului aceluiași unghi este $\dfrac{2}{5}$. Aflați măsura unghiului.

5. Un unghi are măsura de $72°30'$.
   a) Aflați măsura complementului unghiului dat.
   b) Aflați măsura suplementului unghiului dat.

6. Pe dreapta AB considerăm punctul O, între A și B. Punctele C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOD$. Arătați că punctele D, O, C sunt coliniare.

7. I. Fie d, a și b trei drepte în plan.
   a) Dacă $a \parallel b$ și $a \perp d$, atunci $b \perp d$.
   b) Dacă $a \perp d$ și $b \perp d$, atunci $a \parallel b$.
   II. Fie a, b, a' și b' patru drepte în plan astfel încât $a \perp b$ și $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Atunci $a' \perp b'$.

8. În triunghiul ABC avem $\sphericalangle B = 65°$ și $\sphericalangle C = 45°$. Determinați măsura unghiului format de înălțimea din A și bisectoarea unghiului A.

9. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, și CD bisectoarea unghiului ACB, $D \in AB$. Știind că $AD = 3$ cm, calculați distanța de la D la BC.

10. Considerăm triunghiul ABC și AD, $D \in BC$, bisectoarea unghiului BAC. Punctele E și F sunt proiecțiile lui D pe AB, respectiv AC. Demonstrați că AD este mediatoarea segmentului EF.

11. Fie ABC un triunghi echilateral și D simetricul punctului B față de punctul C. Arătați că triunghiul ABD este dreptunghic.

12. Triunghiurile isoscele ABC și DBC au baza comună BC. Demonstrați că $AD \perp BC$.

13. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A.
    a) Determinați poziția ortocentrului triunghiului ABC.
    b) Determinați poziția centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

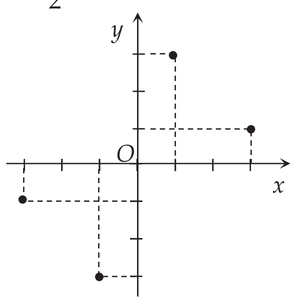
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTE INIȚIALE

Testul 1. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** D. **4.** D. **5.** C. **6.** B. **7.** A. **8.** D. **II. 1.** $a = 2$, $b = \dfrac{3}{4}$, $m_g = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **2.** 5%. **3.** $b = 8$ cm, $(B - b) : 2 = 2$ cm. **4.** a) Conform teoremei înălțimii, $AD^2 = BD \cdot DC$. Obținem că $CD = 6$ cm, $BD = 12$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2} = 54\sqrt{2}$ cm^2; b) Cu teorema catetei, $AB = 6\sqrt{6}$ cm și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul EAC, $\sphericalangle A = 90°$, conform teoremei lui Pitagora, $CE = 9\sqrt{2}$ cm. Deoarece DE este mediană corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul ADB, obținem $DE = 3\sqrt{6}$ cm. Așadar, perimetrul triunghiului CDE este $3\left(\sqrt{6} + 2 + 3\sqrt{2}\right)$ cm.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** A. **3.** C. **4.** C. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** C. **II. 1.** $x = 3$, $y = 1$, $z = 5$, $m_a = 3$. **2.** $7m + 5d = 41$ și $d = m + 1$, de unde $m = 3$, $d = 4$. **3.** $AB = AC = 3$. **4.** a) Fie D mijlocul laturii BC. Triunghiul ABC este isoscel, deci $AD \perp BC$. Din triunghiul ABD obținem $AD = 15$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2} = 180$ cm^2; b) Fie G punctul de intersecție a medianelor AD și BM. Din triunghiul BGD, $\sphericalangle D = 90°$, obținem că $BG = 13$ cm, prin urmare $BM = 19{,}5$ cm.

Testul 3. **I. 1.** C. **2.** B. **3.** D. **4.** A. **5.** D. **6.** B. **7.** B. **8.** A. **II. 1.** $x = \dfrac{7}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{x+y} = 2$. **2.** Orice modul este nenegativ, deci $x - y + 1 = 0$ și $x + 2y - 1 = 0$, de unde $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$. **3.** $M = \{(-3, -1), (-1, -3), (1, 3), (3, 1)\}$. Reprezentarea este realizată în figura alăturată. **4.** a) $\mathcal{A}_{DPQC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{DAP} - \mathcal{A}_{BPQ} = 40\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$; b) $\text{tg}(\sphericalangle APD) = \dfrac{AD}{AP} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle APD = 60°$. Apoi, $\text{tg}(\sphericalangle BPQ) = \dfrac{BQ}{BP} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\sphericalangle BPQ = 30°$. Rezultă că $\sphericalangle DPQ = 180° - \sphericalangle APD - \sphericalangle BPQ = 90°$.



Testul 4. **I. 1.** A. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** A. **7.** B. **8.** A. **II. 1.** $a = 25$, $b = 3$; $(8b - a)^{101} = (-1)^{101} = -1$. **2.** Dacă p este prețul inițial, după a doua mărire devine $\dfrac{144p}{100}$. Astfel, $\dfrac{144p}{100} = 108$, de unde $p = 75$ lei. **3.** Raza cercului este jumătate din diagonala dreptunghiului, adică 13 cm. **4.** a) Dacă $AM = x$, atunci $AB = AC = 2x$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MAC, obținem $5x^2 = 20$, deci $x = 2$. Atunci $AB = AC = 4$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, deci $\mathcal{P}_{ABC} = 4 + 4 + 4\sqrt{2} = \left(8 + 4\sqrt{2}\right)$ cm; b) Triunghiul ABC fiind isoscel, AD este și mediană, deci punctul G este centrul său de greutate. Folosind concurența medianelor într-un triunghi, punctele B, G și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

ALGEBRĂ

Capitolul I. Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$

I.1. Mulţimi definite cu ajutorul unei proprietăţi comune elementelor lor

1. $A = \{e, i, u\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $C = \{0, 1\}$; $D = \{2, 3, 5, 7\}$. **2.** a) $A = \{2, 5, 8\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 9\}$; c) $C = \{9\}$; d) $D = \{0, 4, 8\}$. **3.** a) $A \cup B = \{-2, 0, 1, 7\}$; b) $A \cap B = \{1\}$; c) $A \setminus B = \{-2, 7\}$; d) $A \times B = \{(-2, 0), (-2, 1), (1, 0), (1, 1), (7, 0), (7, 1)\}$. **4.** a) $A = \{1, 2, 3\}$; b) $B = \{-2, -1, 1, 2\}$; c) $C = \{-1, 1\}$; d) $D = \{3, 4\}$. **5.** a) $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$; b) $B = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$; c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 8\}$; d) $D = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{k}{k+1}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\right\}$. **6.** a) De exemplu, $\{-2, 2, 6\} \subset A$ și $\{0, 2, 4\} \subset B$; b) $200 \in B$, $200 \notin A$, $201 \notin A$, $201 \notin B$, $202 \in A$ și $202 \in B$; c) Dacă $x \in A$, atunci $x = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, deci $x \in B$; $200 \in B$ și $200 \notin A$, deci $B \not\subset A$. **7.** a) $2018 = 3 \cdot 672 + 2$, deci $2018 \in C$, $2018 \notin A$, $2018 \notin B$; $2019 = 3 \cdot 673$, deci $2019 \in A$, $2019 \notin B$, $2019 \notin C$; $2020 = 3 \cdot 673 + 1$, deci $2020 \in B$, $2020 \notin A$, $2020 \notin C$; b) $A \cap B = \varnothing$; c) Deoarece $A \cup B \cup C \subset \mathbb{N}$ și orice $x \in \mathbb{N}$ se scrie sub una din formele $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$, rezultă că $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$. **8.** a) $A = \{(3, 1), (2, 3), (1, 5), (0, 7)\}$; b) $B = \{(-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)\}$; c) $C = \{(1, -2)\}$. **9.** a) $|A| = 19$; b) $|B| = 11$; c) $|C| = 20$; d) $|D| = 45$. **10.** a) $A = \left\{0; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$; b) $B = \left\{3\sqrt{2}; \pi\right\}$; c) $C = \left\{0; -\dfrac{6}{2}\right\}$; d) $D = \left\{3\sqrt{2}\right\}$. **11.** a) $A = \{1, 2, 4\}$; b) $B = \{0, 2, 4\}$; c) $C = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$; d) $D = \{-6, -2, 0, 4\}$. **12.** $M = \{-4, -3, \ldots, 8, 9\}$; $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$; $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $D = \{-4, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **13.** Se verifică $A \subset B$ și $B \subset A$. Dacă $x \in A$, rezultă că $x = 2k + 1 = 201 - 200 + 2k = 201 - 2(100 - k) = 201 - 2p$, iar $k \in \mathbb{Z}$ implică $p \in \mathbb{Z}$, deci $x \in B$ și, astfel, $A \subset B$. Analog se demonstrează că $B \subset A$. **14.** Fiecare mulțime conține câte un singur element, astfel: a) P – mijlocul segmentului BC; b) Q – centrul cercului circumscris triunghiului ABC; c) R este mediatoarea segmentului AB; d) S – centrul cercului înscris în triunghiul ABC. **15.** a) B_1 este mulțimea acelor puncte având coordonatele egale. Toate aceste puncte sunt coliniare și formează o dreaptă, numită prima bisectoare (figura 1); b) B_2 este mulțimea acelor puncte având coordonatele opuse. Toate aceste puncte sunt coliniare și formează o dreaptă, numită a doua bisectoare (figura 2); c) C este segmentul cu capetele $M_1(-1, -1)$ și $M_2(1, 1)$ (figura 3).

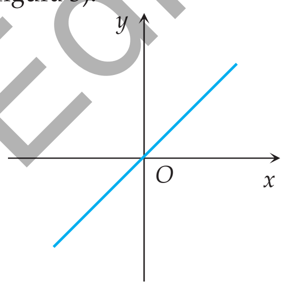


Figura 1

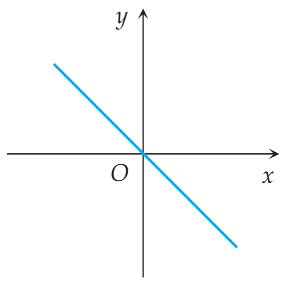


Figura 2

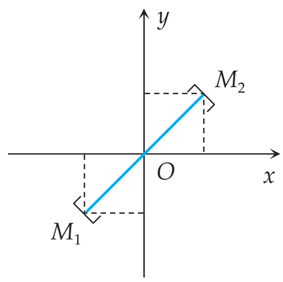


Figura 3

d) $S = \{0\}$. **12.** a) $S = (4, \infty)$; b) $S = [5, \infty)$; c) $S = (-\infty, -2]$; d) $S = (-\infty, 2)$. **13.** a) $S = (-\infty, 2)$; b) $S = [2, \infty)$; c) $S = (3, \infty)$; d) $S = [-2, \infty)$. **14.** a) $S = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$; b) $S = \{0\} \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; c) $S = (9, \infty)$; d) $S = (2, \infty)$. **15.** a) $S = [-1, 3]$; b) $S = [-3, 1]$; c) $S = [-3, 1]$; d) $S = [-3, 1]$. **16.** a) $S = [-2, 3]$; b) $S = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$; c) $S = \left(-2, \dfrac{2}{3}\right)$; d) $S = (-\infty, -2) \cup \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$. **17.** a) $S = \varnothing$; b) $S = \left(-\dfrac{10}{3}, 4\right)$; c) $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; d) $S = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$. **18.** a) $m \in [3, \infty)$; b) $m \in \left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$; c) $m \in [-7, \infty)$; d) $m \in \left(\dfrac{3}{5}, \infty\right)$. **19.** a) $a \in [-3, \infty)$. **20.** a) $x \in (-\infty, -2)$; b) $x \in [2, \infty)$; c) $x \in (5, 11)$; d) $x \in [-5, 10]$. **21.** a) $S = \left[\dfrac{4}{5}, \infty\right)$; b) $S = \left(\dfrac{4}{5}, \infty\right)$; c) $S = \left[\dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{4}\right]$. **22.** a) $x \in (-2, 4]$; b) $x \in [-2, 1)$. **23.** $m \in \left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$.
24. Dacă c este numărul de răspunsuri corecte, $0 \le c \le 100$, $c \in \mathbb{N}$, atunci $100 - c$ este numărul de răspunsuri greșite. Din condiția $5c - 3(100 - c) \ge 80$ rezultă $c \ge 48$. Așadar, 48 este numărul minim de răspunsuri corecte. **25.** $90 < 3x + 30 < 180$ și $x \in \mathbb{Z}$, de unde $x \in \{21, 22, \ldots, 49\}$. **26.** $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$, prin urmare $r_1 \in (1, 15)$. **27.** $E \ge 8{,}75$. **28.** $G \le 19\%$.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1. **1.** $A = (-2, 5]$. **2.** $\dfrac{8}{5} > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 16 > 15$ și $\dfrac{8}{5} < \sqrt{3} \Leftrightarrow 8 < 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 64 < 75$. **3.** $M = \{0, -1\}$, produsul este 0. **4.** $A \cap B = [1, 2)$; $A \cup B = (-9, 7)$. **5.** $S = (1, \infty)$. **6.** $(x, y) \in \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. **7.** $|B| = 11$. **8.** b) Dacă $x \in A$, atunci $u(x) \in \{2, 7\}$, deci $x \neq$ p.p. Așadar, $A \cap B = \varnothing$.
Testul 2. **1.** $\varnothing$. **2.** $M = \{3k \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **3.** $\{1, 3\}$. **4.** [49 kg, 51 kg]. **5.** –1. **6.** $|2x - 3| < 5 \Leftrightarrow x \in (-1, 4)$. **7.** Din $0 < x < 1$ rezultă $0 < x^2 < x < 1$, deci $0 < x < \sqrt{x} < 1$. **8.** a) $52 - 3p \ge 0$, deci $p \le 17$, de unde $|B \cap \mathbb{N}| = 18$; b) $A \cap B = \{1, 7, \ldots, 49\} = \{6t + 1 \mid t \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}\}$.

Testul 3. **1.** F. **2.** $\alpha \in (0°, 90°)$. **3.** $B = \left\{-\dfrac{12}{5}; -\sqrt{7}; 0; 2 - \sqrt{5}\right\}$. **4.** $M = (-\infty, 2)$. **5.** $x = 2$. **6.** $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$. **7.** Din $x - 1 < 5 < 2x + 1$ se obține $x \in (2, 6)$. **8.** a) $A = \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ și $-1{,}41 \in A$; b) Dacă $x \in A$, atunci $\left|x + \sqrt{2}\right| = x + \sqrt{2}$; $\left|x - 3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2} - x$, iar $\left|x + \sqrt{2}\right| + \left|x - 3\sqrt{2}\right| = 4\sqrt{2}$ nu depinde de x.

Capitolul II. Calcul algebric în $\mathbb{R}$

II.1. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere: adunarea şi scăderea. Reducerea termenilor asemenea

1. a) $2x$; b) $-2x$; c) $2y$; d) $-3t$. **2.** a) $-\dfrac{1}{12}x$; b) $\dfrac{2}{3}x$; c) x; d) 0. **3.** a) $4a$; b) $-2a$; c) $-b$; d) $15b$; e) 0; f) $2c$. **4.** a) $-a - 4$; b) $7x - 9$; c) $3a - 6x$; d) $7a - 9x$; e) $-a$; f) $x - a$. **5.** a) $4x + 5y$; b) $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{6}$; c) $-\dfrac{3}{2}a - \dfrac{2}{3}b$; d) $2y$; e) $-4b + 12c$; f) $5x + 2y - 5z$. **6.** a) $-x + 2$; b) $2x + 1$; c) $-x - 5$; d) $-5x + 14$.

Capitolul III. Funcţii

III.1. Noţiunea de funcţie

1. a) Nu: unui județ îi corespund mai multe orașe; b) Da; g(Argeș) = Pitești; g(Cluj) = Cluj-Napoca; g(Maramureș) = Baia Mare; g(Vrancea) = Focșani; c) Da; h(Bârlad) = Vaslui; h(Huși) = Vaslui; h(Petroșani) = Hunedoara; h(Deva) = Hunedoara; h(Orăștie) = Hunedoara. **2.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Nu; f) Nu. **3.** Notăm cu A domeniul și cu B codomeniul. a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$; b) $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$; c) A = {□, ◇, ○}, B = {△, ♡, ⏢}. **4.** a) $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $\text{Im} f = \{a, b, c, d\}$, iar codomeniul poate fi orice mulțime B care include $\{a, b, c, d\}$; b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\text{Im} f = \{0, 1, 4\}$, $B \supset \{0, 1, 4\}$. **5.** a) Domeniul este $\{-3, -2, 0, 1\}$, codomeniul este $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, iar imaginea este $\{-2, -1, 1, 2\}$; b) Domeniul este $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, codomeniul este $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, iar imaginea este $\{0, 1, 4\}$. **6.** a) $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to B$, $f(x) = (-1)^{x+1}$; $\text{Im} f = \{-1, 1\}$; B poate fi orice mulțime care include $\text{Im} f$; b) $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to B$; $f(x) = 2x - 1$; $\text{Im} f = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$; B poate fi orice mulțime care include $\text{Im} f$. **7.** a) $B = \{-1, 1, 7\}$; b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **8.** a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $[2, +\infty)$; c) $\mathbb{R}$. **9.** $a = b = 1$, $A = \mathbb{Z}$. **10.** a) -2; 3; b) $\text{Im} f = \{-3, -1, 1, 3\}$. **11.** a) $m_a = 1$, $m_g = 9$; b) $A = \sqrt{2}[(a\sqrt{2}+1)-(b\sqrt{2}+1)] = 2(a-b) \in \mathbb{Z}$. **12.** a) 115; b) 0. **13.** a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 1$; c) $x \in \{-1, 3\}$. **14.** $x \in [-3, 1]$. **15.** a) $f(\sqrt{2}) - f(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3}-\sqrt{2}) > 0$, deci $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$; b) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$, $f(0) = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **16.** a) $m \in \{0, 1\}$; b) $\frac{1}{101}$. **17.** a) $f(0) = 0, f(5) = 5, f(9) = 2, f(1000) = 6, f(3003) = 0$; b) $\text{Im} f = \{0, 1, ..., 6\}$. **18.** a) $f(-5) = 25$; $f(-\sqrt{3}) = 3, f(-1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2, f(2) = 2, f(4) = 3$; b) Observăm că $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f(x) \geq 1$, $x \in (-1, 2] \Rightarrow f(x) = 2$, $x \in (2, \infty) \Rightarrow f(x) \in (1, \infty)$, prin urmare $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **19.** a) Trecem $x \to x + 1$ și obținem că $f(x) = 2x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$; b) Trecem $x \to \frac{x}{2}$ și obținem că $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **20.** a) Luăm $x = -1$ în relația din ipoteză; obținem că $f(0) = -2 - f(0)$, de unde $f(0) = -1$; b) În $f(x + 1) = 2x + 1$, trecem $x \to x - 1$, obținând $f(x) = 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **21.** a) $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) \in \{1, 2\}$, deci există două asemenea funcții; b) $f(b) = f(c) = 2$, $f(a) \in \{1, 2\}$, deci există două astfel de funcții. **22.** a) $f(1) = f(2) = ... = f(10) = 1$, deci există o singură funcție; b) există un unic $i \in \{1, 2, ..., 10\}$ pentru care $f(i) = 1$, iar $f(j) = 0$, $\forall j \neq i$; obținem 10 astfel de funcții. **23.** $s(t) = 70t$, respectiv $s(t) = 50 + 70t$. **24.** $u(t) = 6t$. **25.** b) $g(n) = 800 \cdot n - f(n) = 400n - 10000000$; $g(20000) = -2000000 < 0$, $g(30000) = 2000000 > 0$; la o producție de 20000 unități, fabricantul are o pierdere de 2000000 lei, iar la o producție de 30000 mașini de spălat, are un profit de 2000000 lei; c) $n > 25000$; pentru aceste valori ale lui n, fabricantul are profit.

III.2. Graficul unei funcţii

1. a) $G_f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$; b) $G_f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 4)\}$; c) $G_f = \{(1, -1), (3, -1), (4, 1)\}$;

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

IV.1. Puncte. Drepte. Plane

1. 180°. **2.** P_1: A; P_2: F; P_3: A. **3.** a) AB și CD sunt necoplanare, $D \notin \alpha$; b) $(ABC) \cap \alpha = AB$; c) $(ACD) \cap (BOC) = CD$. **4.** P_1: A; P_2: F; P_3: A; P_3: A. **5.** a) Sunt 8 drepte: AB, AC, AD, BC, CD, DB, AM și BM; b) Sunt 5 plane: (ABC), (ACD), (ABD), (BCD), (ABM). **6.** a) Sunt 7 plane: (ABC), (PAB), (PBC), (PCD), (PAD), (PAC), (PBD); b) $(PAC) \cap (PBD) = PO$, unde $\{O\} = AC \cap BD$; c) AB și CD sunt paralele, AC și BD sunt concurente, iar PA și BC sunt necoplanare. **7.** a) Dreptele concurente AC și BD determină un plan, iar punctele A, B, C, D aparțin acestui plan; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 260$ cm^2; c) Deoarece $\dfrac{OC}{OA} \neq \dfrac{OD}{OB}$, rezultă că dreptele coplanare AB și DC sunt concurente într-un punct P. Avem $P \in AB \subset \alpha$ și $P \in CD$, deci planul α și dreapta CD au un punct comun. **8.** Dreptele BD și EF sunt concurente în mijlocul segmentului AC, deci determină un plan. Punctele B, F, D, E aparțin planului α, deci sunt coplanare. **9.** Punctele A, O, C sunt coliniare, deci punctele A, C, E, O sunt coplanare. **10.** Medianele AM, BN și CP ale triunghiului ABC sunt concurente în G. Cele trei plane considerate conțin dreapta DG.

IV.2. Piramida

1. a) piramidă patrulateră; b) piramidă triunghiulară sau tetraedru; c) piramidă hexagonală; d) piramidă triunghiulară sau tetraedru; e) piramidă pentagonală. **2.** De exemplu: a) unele cutii pentru lapte, unele corturi; b) piramidele egiptene, unele acoperișuri. **4.** a) piramidă triunghiulară; b) piramidă patrulateră; c) piramidă hexagonală. **5.** 60 cm. **6.** 12 m. **7.** $4\sqrt{3}$ cm^2. **8.** 4,5 cm. **9.** $27\sqrt{3}$ cm^2. **10.** a) $\mathcal{P}_{ANB} = 6\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm; b) $MN = 3\sqrt{2}$ cm; c) $(ANB) \cap (CMD) = MN$. **11.** Deoarece $MP = 3\sqrt{2}$ cm și $MN = NP = 3$ cm, avem $MP^2 = MN^2 + NP^2$, deci $\sphericalangle MNP = 90°$ și atunci $\mathcal{A}_{MNP} = 4{,}5$ cm^2. **12.** 24 cm. **13.** a) $(ADE) \cap (CDF) = BD$; b) $(ABC) \cap (DEF) = EF$. **14.** 33 cm și 12 cm^2. **15.** $32\sqrt{3}$ dm^2. **16.** a) $AB = 12$, $VM = \dfrac{AB}{2} = 6$ cm; b) $CV^2 + VM^2 = CM^2 \Rightarrow \sphericalangle CVM = 90°$; c) $VO = 2\sqrt{6}$ cm. **17.** Triunghiul ABC este echilateral, deci $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$ cm $= VA$. **18.** 49 cm^2. **19.** 48 cm. **20.** $MP = 6$ cm, $SO = 4$ cm. **21.** 4 cm^2, $\sqrt{3}$ cm^2. **22.** Dacă $VA = AB = a$, atunci $BD = a\sqrt{2}$, căci BD este diagonala pătratului $ABCD$ cu $AB = a$. Cum $VB^2 + VD^2 = 2a^2 = BD^2$, rezultă că $VB \perp VD$. **23.** Deoarece $VA = AC = CV = a\sqrt{2}$, rezultă că triunghiul VAC este echilateral, deci $\mathcal{A}_{VAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ cm^2. **24.** a) $12\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm; b) 60°. **25.** Cum diagonala BD a pătratului $ABCD$ este egală cu $8\sqrt{2}$ cm, avem $VD^2 + VB^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = BD^2$, deci $\sphericalangle BVD = 90°$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice

$= \sphericalangle ACB = 60°$; c) Fie P mijlocul segmentului AB. În triunghiul isoscel MAB, mediana MP este și înălțime. Avem $\mathcal{A}_{MAB} = \dfrac{MP \cdot AB}{2} = \dfrac{MA \cdot d(B, MA)}{2} \Rightarrow d(B, MA) = \dfrac{MP \cdot AB}{MA} = \dfrac{24\sqrt{5}}{5}$ cm.
3. a) $MC = 9$ cm; b) Cum $BD \perp AC$ și $BD \perp AA'$, rezultă că $BD \perp (ACC')$. Însă $AC' \subset (ACC')$, deci $BD \perp MC'$; c) Fie O centrul bazei $ABCD$ și $P = \mathrm{pr}_{MO}\, A'$. Am arătat că $BD \perp (ACC')$ și, cum $A'P \subset (ACC')$, înseamnă că $A'P \perp BD$. Deducem că $A'P \perp (MBD)$, prin urmare $d(A', (MBD)) = A'P$. Din $\Delta A'PM \sim \Delta OAM$ obținem că $\dfrac{A'P}{OA} = \dfrac{A'M}{OM}$, așadar $A'P = \dfrac{OA \cdot A'M}{OM} =$
$= \sqrt{6}$ cm.

Capitolul V. Arii şi volume ale unor corpuri geometrice

V.1. Calculul unor distanţe şi a unor măsuri de unghiuri în corpurile studiate

1. a) În triunghiul $AB'D'$, MN este linie mijlocie; $MN = 2$ cm; b) Întrucât $MN \parallel AB'$ și $D'C \parallel$
$\parallel A'B$, se obține $\sphericalangle(MN, D'C) = \sphericalangle(AB', A'B)$. Dacă $\{O\} = A'B \cap A'B$, triunghiul $B'OB$ este echilateral, deci $\sphericalangle B'OB = 60°$. **2.** a) $d(D', AC) = D'O = 12\sqrt{10}$ cm; b) Construim $DT \perp D'O$, $T \in D'O$. Întrucât $DT \perp D'O$, $D'O \perp AC$ și $AC \perp DO$, obținem, conform $R_2T3\perp$, că $DT \perp (D'AC)$, deci $d(D, (D'AC)) = DT$. Din triunghiul $D'DO$, $DT = \dfrac{DD' \cdot DO}{D'O} = \dfrac{24\sqrt{10}}{5}$ cm.
3. a) $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle ABA' = 30°$. Din triunghiul ABA' obținem $AA' = 2\sqrt{2}$ cm. Fie O centrul $ABCD$ și $OM \perp AC'$, $M \in AC'$. Deoarece $\Delta AOM \sim \Delta AC'C$, rezultă că $\dfrac{OM}{CC'} = \dfrac{AO}{AC'}$, deci $OM = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ cm; b) Ținând cont că $(ABB') \cap (BDB') = BB'$, $AB \perp BB'$, $BD \perp BB'$, deducem că $\sphericalangle((ABB'), (BDB')) = \sphericalangle ABD = 45°$. **4.** a) Fie M mijlocul lui $A'B'$. Deoarece $MC' = 24\sqrt{3}$ cm și $AM = 24\sqrt{2}$ cm, avem $\mathrm{tg}(\sphericalangle MAC') = \dfrac{MC'}{MA} = \dfrac{24\sqrt{3}}{24\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; b) Fie N mijlocul laturii BC. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, rezultă că $AN \perp BC$. Din triunghiul isoscel $A'BC$, rezultă că $A'N \perp BC$. Întrucât $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $AN \perp BC$, $AN \subset (ABC)$, $A'N \perp BC$ și $A'N \subset (A'BC)$, deducem că $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'NA = 30°$. **5.** $AB = 6$ cm. Deoarece $AM \perp CM$, $AM \perp MM'$ și $CM \cap MM' = \{M\}$, rezultă că $AM \perp (MCC')$, deci $\sphericalangle(AC', (CMM')) = \sphericalangle AC'M$. Din triunghiul AMC', $\sphericalangle M = 90°$, obținem că $\sin(\sphericalangle AC'M) = \dfrac{AM}{AC'} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$;
b) Fie P mijlocul lui AC. Întrucât triunghiul ABC este echilateral, obținem că $BP \perp AC$. Atunci $B'P \perp AC$, deci distanța căutată este $B'P$. Din triunghiul PBB', $\sphericalangle B = 90°$, se obține $B'P = 3\sqrt{19}$ cm. **6.** a) Deoarece $ABCDEF$ este hexagon regulat, rezultă că $AC \perp CD$, $AC =$
$= 6\sqrt{3}$ cm. Cum $AA' \perp (ABC)$, $CD \subset (ABC)$, $AC \perp CD$ și $AC \subset (ABC)$, vom obține, conform $T3\perp$, că $A'C \perp DC$, deci $d(A', CD) = A'C = 12$ cm; b) Ținând cont că $(A'CD) \cap (ABC) = CD$, $AC \perp CD$, $AC \subset (ABC)$, $A'C \perp DC$ și $A'C \subset (A'DC)$, deducem că $\sphericalangle((A'CD), (ABC)) = \sphericalangle A'CA$.

Capitolul VI. Recapitularea materiei din clasele V-VII

VI.1. Numere naturale

1. a) 12; b) 6; c) 27; d) 3. **2.** a) 2; b) 267; c) 17; d) 0; e) 20; f) 167. **3.** b) 19. **4.** a) 7; b) 18; c) 4; d) 3. **5.** a) 44^2; b) 13^3. **6.** 250, 254, 256. **7.** 270 și 675. **8.** $a = 13$, $b = 260$ sau $a = 26$, $b = 169$. **9.** a) $S = 111(a + b + c)$ și $111 = 37 \cdot 3$, deci se divide cu 37; b) $S \in \{666, 777, 888, 999\}$. **10.** $n = 0, 2, 3$ sau 23. **11.** Evident, a se divide cu 2. Cum $a = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{23} + 2^{24}) = 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \dots + 2^{23} \cdot 3$ și $a = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{22} + 2^{23} + 2^{24}) = 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \dots + 2^{22} \cdot 7$, deducem că a se divide cu 3 și cu 7. Astfel, a se divide cu $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. **12.** $a = 2 \cdot 4^n \cdot 7^{n+1}$ se divide cu $2 \cdot 4 \cdot 7^2 = 392$ pentru $n \geq 1$. **13.** $\frac{2}{5}$. **14.** b) $\frac{2}{5}$. **15.** $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$. **16.** a) Elementele mulțimii A sunt de forma $3n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots, 99$, deci $203 = 3 \cdot 67 + 2 \notin A$; b) 99 de elemente; c) $m_a = \frac{3(1+2+\dots+99)+99}{99} = 3 \cdot 50 + 1 \in A$. **17.** $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$. **18.** Relația este echivalentă cu $4a = 5(b + 2)$, deci $4a$ se divide cu 5. Găsim $a = 5$, $b = 2$. **19.** a) $n = 9(11a - b)$; b) $n_{minim} = 18$, $n_{maxim} = 882$. **20.** Dacă $a \leq 4$, rezultă $\overline{abc} + \overline{ab} + a \leq 499 + 49 + 4 < 628$. Pentru $a \geq 6$, rezultă $\overline{abc} + \overline{ab} + a \geq 600 + 60 + 6 > 628$. Prin urmare, $a = 5$. Pentru $a = 5$, găsim $\overline{bc} + b = 73$ și, de aici, $b = 6$ și $c = 7$. În concluzie, $\overline{abc} = 567$. **21.** 720, 721, …, 729. **22.** a) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; b) Din $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, deducem $b = 48$. **23.** Fie n numărul căutat. Atunci $n = 12x + 9$, $n = 15y + 12$ și $n = 17z$, $x, y, z \in \mathbb{N}$. Rezultă $n + 3 = 12(x + 1) = 15(y + 1)$, deci $n + 3$ se divide cu 12 și 15. Prin urmare, $n + 3$ este multiplu de 60, de aici $n \in \{57, 117, 177, 237, 297, 357, 417, \dots\}$. Cum n se divide cu 17, prima valoare convenabilă este $n = 357$. **24.** Fie n numărul căutat. Atunci $n = 12x + 7$, $n = 15y + 7$, $n = 18z + 7$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $n - 7$ este multiplu de 12, 15 și 18. Prin urmare, $n - 7$ este multiplu de 180. Cum n este minim și $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, găsim $n = 187$. **25.** Din teorema împărțirii cu rest, $77 = n \cdot x + 5$, $182 = n \cdot y + 2$, $225 = n \cdot z + 3$, $n > 5$. Rezultă că n este divizor al numerelor 72, 180 și 252. Cel mai mare divizor comun al numerelor 72, 180 și 252 este 36. Prin urmare, n este divizor al numărului 36 și $n > 5$. Rezultă $n \in \{6, 9, 12, 18, 36\}$. **26.** a) 18; b) 106; c) 27; d) 42; e) 108; f) 8. **27.** 3, 4, 5, 6, 7. **28.** a) Cum $a + b + c = 432$, $c = 234 + a + b$, deducem $c = 333$ și $a + b = 99$; b) $(a, b) \in \{(1, 98), (2, 97), \dots, (49, 50)\}$, deci $a_{max} = 49$; c) 49 de perechi. **29.** Fie x rânduri cu 16 scaune. Atunci $16 \cdot x + 18(20 - x) = 350$, deci $x = 5$; 15 rânduri au câte 18 scaune. **30.** Fie n numărul băncilor din clasă. Atunci numărul elevilor din clasă va fi $2n + 3$ și $3(n - 3) + 2$. Rezultă $2n + 3 = 3(n - 3) + 2$, deci $n = 10$. Sunt 23 de elevi. **31.** Fie a și b numărul de elevi care participă numai la olimpiada de fizică, respectiv numai la cea de chimie, iar c numărul de elevi care participă la ambele olimpiade. Rezultă că $a + b + c = 24$, $a + c = 18$, $b + c = 13$. Deducem $a = 11$, $b = 6$, $c = 7$. **32.** Fie n numărul cărților de pe al doilea raft. Atunci $2(3n - 10) = n + 10$, deci $n = 6$. Pe primul raft sunt 18 cărți.

VI.2. Numere întregi. Numere raţionale

1. a) 12; b) –18; c) 25; d) –1; e) –1; f) –18. **2.** a) –3; b) 0; c) 25; d) –4. **3.** (2, –2); (2, –1); (1, –1). **4.** $a = -1$; $S = 1$. **5.** –2. **6.** $(x, y) \in \{(0, -3), (0, 3), (1, 2), (1, -4), (2, 1), (2, -5)\}$. **7.** a) 38; b) –15;

CUPRINS