

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 4174/09.04.2024.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Roxana Pietreanu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 6 / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
2 vol.

ISBN 978-973-47-4298-1

Partea 2. – 2025. – ISBN 978-973-47-4374-2

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro
sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi.

Opusul unui număr întreg



Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+” în față: $+1, +2, +3, \dots$ se numesc numere întregi pozitive. Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu \mathbb{Z}_+ , deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ și avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „-” în față: $-1, -2, -3, \dots$ se numesc numere întregi negative. Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu \mathbb{Z}_- , deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu \mathbb{Z} și se definește astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numește mulțimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparțin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiție: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înțelegem numărul întreg $-a$. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg -5 .

Opusul numărului întreg -8 este numărul întreg 8.



Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinați mulțimile:

a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;

b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

Soluție:

a) $E = \{15, 8\}$;

b) $F = \{-6, -21\}$.

2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

a) -9 ;

b) 0;

c) 17;

d) -11 .

Soluție:

a) 9;

b) 0;

c) -17 ;

d) 11.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți mulțimile următoare:

- a) \mathbb{Z}_+ ; b) \mathbb{Z}_- ; c) \mathbb{Z}^* ; d) \mathbb{Z} .

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $-25 \in \mathbb{Z}_-$; b) $42 \in \mathbb{Z}_+$; c) $51 \notin \mathbb{Z}_-$; d) $-71 \notin \mathbb{Z}_+$;
 e) $49 \notin \mathbb{Z}_+$; f) $-28 \in \mathbb{Z}_-$; g) $-35 \notin \mathbb{Z}_-$; h) $87 \in \mathbb{Z}_+$;

3. Se consideră mulțimea $A = \{-2, 4, -5, 7, 8, -1, 0, -13, 12, -9\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

- a) $A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

a)																			
b)																			

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) Mulțimea \mathbb{Z}_+ este finită. b) Mulțimea \mathbb{Z}_- este finită.
 c) Mulțimea \mathbb{Z}^* este infinită. d) Mulțimea \mathbb{Z} este infinită.

5. Se consideră mulțimea $E = \{-15, 0, 6, -8, 2, 17\}$. Determinați următoarele mulțimi:

- a) $E \cap \mathbb{Z}_-$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+$; c) $E \cap \mathbb{Z}^*$; d) $E \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^*$.

a)	$E \cap \mathbb{Z}_-$	=																	
e)	$E \setminus \mathbb{Z}_+$	=																	

6. Completați tabelul următor:

Numărul	43	-7	-25	134	0	-91	-72	64	-8
Opusul									

7. Completați tabelul următor:

Numărul	-6			201		-18			92
Opusul		42	-58		307		-9	83	

Exerciții și probleme de dificultate redusă

8. Se consideră mulțimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinați mulțimea $B = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in A\}$.

9. Se consideră mulțimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinați mulțimea $F = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E\}$.

10. Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr prim de o cifră}\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.

11. Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr compus de o cifră}\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.

12. Se consideră mulțimile $X = \{-8, 0, 3\}$ și $Y = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in X\}$. Scrieți submulțimile mulțimii Y .

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Se consideră mulțimile $X = \{-9, -5, 2, 0, -3, 1, 3\}$ și $Y = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in X\}$. Câte submulțimi are mulțimea Y ?

14. Se consideră mulțimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ și $B = \{b \mid b \text{ este opusul lui } a, a \in A\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

- a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

15. Se consideră mulțimile $A = \{-17, -13, 0, 13, 17\}$ și $B = \{x \mid x \text{ este opusul lui } a, a \in A \cap \mathbb{Z}^*\}$. Determinați mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

16. Se consideră mulțimile $E = \{-7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, $F = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E \cap \mathbb{Z}_-\}$ și $D = \{z \mid z \text{ este opusul lui } x, x \in E \cap \mathbb{Z}_+\}$. Determinați mulțimile:

- a) $E \cap F$; b) $E \cap D$; c) $E \setminus F$; d) $E \setminus D$.

17. Se consideră mulțimile $A = \{-9, -5, -3, 0, 3, 5\}$, $A_1 = \{x \mid x \text{ este opusul lui } a, a \in A \setminus \mathbb{Z}_+\}$ și $A_2 = \{z \mid z \text{ este opusul lui } a, a \in A \setminus \mathbb{Z}_-\}$. Determinați mulțimile:

- a) $A \cap A_1$; b) $A \cap A_2$; c) $A_1 \setminus A$; d) $A \setminus A_2$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

18. Se consideră mulțimile $M = \{-6, -4, -2, 0, 4, 6, 8\}$, $P = \{p \mid p \text{ este opusul lui } m, m \in M \cap \mathbb{Z}_+\}$ și $Q = \{q \mid q \text{ este opusul lui } m, m \in M \cap \mathbb{Z}_-\}$. Determinați mulțimile:

- a) $M \setminus (P \cup Q)$; b) $M \cap (P \cup Q)$; c) $(P \cup Q) \setminus M$.

19. Se consideră mulțimile $E = \{-11, -6, 0, 6, 7, 8\}$, $E_1 = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E \setminus \mathbb{Z}_-\}$ și $E_2 = \{z \mid z \text{ este opusul lui } x, x \in E \setminus \mathbb{Z}_+\}$. Determinați mulțimile:

- a) $E \setminus (E_1 \cup E_2)$; b) $E \cap (E_1 \cup E_2)$; c) $(E_1 \cup E_2) \setminus E$.

20. Determinați mulțimile $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $F = \{y \mid y \in \mathbb{Z}^*, y = -x, x \in E\}$, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

1. $E \cup F = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$; 2. $E \setminus \mathbb{Z}_- = \{0, 5\}$; 3. $F \setminus \mathbb{Z}_+ = \{-5\}$.

21. Determinați mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{y \mid y = -x, x \in A\}$, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

1. $A \cap \mathbb{Z}_- = \{-7, -3\}$; 2. $B \setminus \mathbb{Z}_+ = \{-3, 0\}$.

22. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{y \mid y = -x, x \in E\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$, știind că mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile:

1. $A \neq B$; 2. $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; 3. $A \cap \mathbb{Z}_- = \{-2, -1\}$.

Lecția 4. Adunarea numerelor întregi. Proprietățile adunării



Citesc și rețin

Suma a două numere întregi x și y este un număr întreg unic, notat $x + y$. Operația prin care se obține suma a două numere se numește **adunare**.

Suma numerelor întregi x și y , pe care o notăm cu S , se obține astfel:

- dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $S = +(|x| + |y|)$;
- dacă $x < 0$ și $y < 0$, atunci $S = -(|x| + |y|)$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| > |y|$, atunci $S = +(|x| - |y|)$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| = |y|$, atunci $S = 0$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| < |y|$, atunci $S = -(|y| - |x|)$;
- dacă $x = 0$, atunci $S = y$, iar dacă $y = 0$, atunci $S = x$.

Proprietățile adunării

- **Comutativitatea:** $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;
- **Asociativitatea:** $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$;
- **0 este element neutru:** $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.



Cum se aplică?

1. Efectuați:

- a) $5 + 39$; b) $(-7) + (-8)$; c) $14 + (-8)$; d) $(-29) + 16$.

Soluție:

- a) $5 + 39 = +(5 + 39) = +44 = 44$; b) $(-7) + (-8) = -(7 + 8) = -15$;
- c) $14 + (-8) = +(14 - 8) = +6 = 6$; d) $(-29) + 16 = -(29 - 16) = -13$.

2. Calculați:

- a) $(-12) + (-23) + 31$; b) $|-8| + (-27) + |16|$.

Soluție:

- a) $(-12) + (-23) + 31 = (-35) + 31 = -4$;
- b) $|-8| + (-27) + |16| = 8 + (-27) + 16 = -19 + 16 = -3$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Efectuați:

- a) $(-5) + (-7) = \square \square \square$ b) $(-4) + (-6) = \square \square \square$ c) $(-6) + (-9) = \square \square \square$
d) $(-14) + (-4) = \square \square \square$ e) $(-7) + (-25) = \square \square \square$ f) $(-29) + (-8) = \square \square \square$

2. Efectuați:

- a) $8 + (-2) = \square \square \square$ b) $(-5) + 8 = \square \square \square$ c) $9 + (-7) = \square \square \square$
d) $(-19) + 8 = \square \square \square$ e) $6 + (-23) = \square \square \square$ f) $(-28) + 9 = \square \square \square$

3. Completați tabelul următor:

x	-20	45	-26	-25	-50	80	-70	-67
y	32	-23	-18	-35	15	-45	-20	42
$x + y$								

4. Aflați suma următoarelor numere întregi:

- a) -5 și -8 ; b) 13 și -7 ; c) -4 și -9 ; d) -6 și 16 ;
 e) -26 și -8 ; f) 29 și -35 ; g) -4 și -49 ; h) -56 și 27 .

f)	$29 + (-35) =$																			
h)	$(-56) + 27 =$																			

5. Într-o zi de iarnă, temperatura minimă pe țară a fost de -21°C . Determinați temperatura minimă pe țară din ziua următoare, știind că aceasta a fost mai scăzută cu 2°C .

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Marea Moartă se află la altitudinea de -394 m. O echipă de cercetători a scufundat o cameră de luat vederi la adâncimea de 17 m pentru a detecta eventualele forme de viață din această mare. Determinați altitudinea camerei de luat vederi.

7. Calculați:

- a) $(-5) + (-6) + (-25)$; b) $(-7) + (-32) + (-4)$; c) $(-39) + (-8) + (-3)$;
 d) $(-2) + (-45) + (-12)$; e) $(-19) + (-6) + (-52)$; f) $(-56) + (-7) + (-15)$.

8. Calculați:

- a) $(-18) + 24 + (-8)$; b) $(-14) + (-9) + 20$; c) $25 + (-17) + (-28)$;
 d) $(-27) + 31 + (-11)$; e) $(-38) + 30 + (-17)$; f) $(-42) + (-16) + 70$.

9. Calculați:

- a) $|-21| + (-5)$; b) $(-19) + |-7|$; c) $|26| + (-12)$;
 d) $|-6| + (-37)$; e) $(-34) + |18|$; f) $|-35| + (-8)$.

10. Calculați:

- a) $|-12| + |25| + (-20)$; b) $|26| + (-80) + |-45|$; c) $(-49) + |-13| + |42|$;
 d) $|-54| + (-95) + |31|$; e) $|-43| + (-75) + |19|$; f) $(-80) + |25| + |-37|$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Calculați:

- a) $20 + (-25) + (-33) + 49$; b) $(-14) + (-13) + 30 + (-8)$;
 c) $(-24) + 27 + 20 + (-18)$; d) $(-45) + 29 + (-32) + (-2)$.

12. Calculați:

- a) $|-8| + (-37) + (-25) + |31|$; b) $(-4) + |-39| + (-63) + |17|$;
 c) $|61| + (-5) + |-24| + (-70)$; d) $(-57) + (-6) + |18| + |-35|$.

13. Temperatura maximă pe țară înregistrată la ora 7 în ziua de 27 februarie, anul 2016 a fost de -4°C și a crescut cu 1°C în fiecare din următoarele trei zile. Precizați temperatura maximă pe țară înregistrată la ora 7 în ziua de 1 martie.

14. Calculați $x + y$ și $y + (-x)$ în următoarele cazuri:

a) $x = (-72) + |-28| + (-87)$ și $y = |59| + (-98) + (-79)$;

b) $x = |92| + (-165) + (-83)$ și $y = (-75) + |-29| + 127$;

c) $x = (-59) + (-48) + |203|$ și $y = |-83| + (-312) + 158$.

15. Calculați suma elementelor mulțimii A în următoarele cazuri:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 123\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 201\}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Calculați suma elementelor mulțimii E în următoarele cazuri:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -21 \leq x < 73\}$;

b) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -97 < x \leq 48\}$.

17. Calculați $S_1 + S_2$, știind că:

a) $S_1 = (-2) + (-4) + (-6) + \dots + (-200)$ și $S_2 = (-3) + (-6) + (-9) + \dots + (-600)$;

b) $S_1 = (-4) + (-8) + (-12) + \dots + (-92)$ și $S_2 = (-6) + (-12) + (-18) + \dots + (-96)$.

18. Calculați $S_1 + S_2$, știind că:

a) $S_1 = (-5) + (-10) + (-15) + \dots + (-500)$ și $S_2 = 6 + 12 + 18 + \dots + 300$;

b) $S_1 = 7 + 14 + 21 + \dots + 210$ și $S_2 = (-8) + (-16) + (-24) + \dots + (-120)$.

19. Se consideră suma: $S = 1 + (-3) + 5 + (-7) + \dots + 2021$. Calculați valoarea absolută a sumei S .

20. Se consideră numărul întreg $a = (-1) + 2 + (-3) + \dots + (-2013)$. Determinați opusul numărului întreg a .

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

21. Se dă suma $s = |-1| + |(-1) + 1| + |(-1) + 1 + (-1)| + \dots + \underbrace{|(-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)|}_{n \text{ termeni}}$.

Determinați numărul natural n pentru care $s = 101$.

22. Abscisele a n puncte distincte de pe axa numerelor sunt numere întregi consecutive, cu suma egală cu 49. Determinați n .

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 1/2022)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați suma următoarelor numere întregi:

a) -24 și 45 ;

b) -32 și -9 ;

c) $|-27|$ și -30 .

(3p) 2. Calculați:

a) $(-19) + 28 + (-2)$;

b) $34 + (-14) + (-20)$;

c) $|-55| + (-60) + (-1)$.

20

(3p) 3. Calculați $x + y$ știind că: $x = |27| + |-5| + (-81)$ și $y = |-46| + |4| + (-60) + 11$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) 1. Rezultatul calculului $(-5) + (-15) + 10$ este egal cu:
A. -10; B. 30; C. 25; D. -15.
- (1p) 2. Rezultatul calculului $5 - (-10) - 20$ este egal cu:
A. 12; B. -6; C. -5; D. 18.
- (1p) 3. Rezultatul calculului $(-2) \cdot (-5) + 3 \cdot (-4)$ este egal cu:
A. 14; B. -2; C. -3; D. 23.
- (1p) 4. Rezultatul calculului $25 : (-5) + (-20) : (-4)$ este egal cu:
A. -8; B. 0; C. 4; D. -6.
- (1p) 5. Rezultatul calculului $(-2)^3 - (-2)^2$ este egal cu:
A. -16; B. 4; C. 8; D. -12.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

- (1p) 1. Aflați rezultatul calculului $[(-6) : (-3) + (-5)]^2 \cdot (-2)^3$.
- (1p) 2. Determinați modulul numărului întreg:
$$x = \{(-1)^{11} - [(-7) \cdot (-7)^2]^3 : (-7)^7\} : (-5)^2$$
- (1p) 3. Determinați numerele întregi și consecutive de aceeași paritate a , b și c cu proprietatea $a \cdot b - a \cdot c = 240$.
- (1p) 4. Se consideră numărul întreg $a = |2^{28} - 3^{14}| + |2^{21} - 3^{14}|$. Arătați că $a > 5^{12}$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) 1. Rezultatul calculului $(-20) + 12 + 13$ este egal cu:
A. -10; B. 5; C. 6; D. -15.
- (1p) 2. Rezultatul calculului $14 - (-6) - 30$ este egal cu:
A. 21; B. -12; C. -10; D. 27.
- (1p) 3. Rezultatul calculului $(-4) \cdot 2 + (-6) \cdot (-3)$ este egal cu:
A. 10; B. -14; C. -17; D. 20.
- (1p) 4. Rezultatul calculului $(-9) : (-3) - (-14) : 7$ este egal cu:
A. 8; B. -10; C. -13; D. 5.
- (1p) 5. Rezultatul calculului $(-3)^3 + (-5)^2$ este egal cu:
A. 12; B. -2; C. -6; D. 16.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

- (1p) 1. Aflați rezultatul calculului $[18 - (-6) \cdot (-7)] : (-2)^3$.
- (1p) 2. Determinați opusul numărului întreg:
$$x = [(-2)^3]^5 : [(-5)^2 \cdot (-1)^7 + (-3)^3 : (-1)^9]^{11}$$

(1p) 3. Determinați valorile pe care le poate lua expresia:

$$E = (-1)^n \cdot 11 - (-1)^{n+1} \cdot (-4) + (-1)^{n+3} \cdot 9, n \in \mathbb{N}.$$

(1p) 4. Notăm cu S_1 și S_2 sumele elementelor mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid |x| < 15\}$, respectiv $B = \{y \in \mathbb{Z}_+ \mid |y| < 85\}$. Calculați $S_2 : S_1$.

Testul 3

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) 1. Rezultatul calculului $(-8) + 10 + (-6)$ este egal cu:
A. 9; B. -5; C. -4; D. 7.
- (1p) 2. Rezultatul calculului $(-16) - (-6) - 5$ este egal cu:
A. -18; B. 21; C. 24; D. -15.
- (1p) 3. Rezultatul calculului $3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-7)$ este egal cu:
A. -1; B. -12; C. -13; D. -7.
- (1p) 4. Rezultatul calculului $(-18) : 3 + (-24) : (-4)$ este egal cu:
A. -8; B. 0; C. 2; D. -11.
- (1p) 5. Rezultatul calculului $2^4 - (-6)^2$ este egal cu:
A. -26; B. 24; C. 28; D. -20.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

- (1p) 1. Aflați rezultatul calculului: $[(-7)^2 + (-3)^3] : (-11)$.
- (1p) 2. Determinați modulul numărului întreg:
 $x = [(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3]^3 : (-2)^5$.
- (1p) 3. Comparați numerele întregi:
 $x = -(-5)^{34} : [|2^{26} - 5^{13}| - (-4)^{13}]$ și $y = (-2)^{49}$.
- (1p) 4. Calculați suma:
 $S = (1 + 3) : (-2) + (3 + 5) : (-2) + (5 + 7) : (-2) + \dots + (99 + 101) : (-2)$.

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VI-a

Capitolul: Mulțimea numerelor întregi

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

- (7p) 1. Suma numerelor întregi -43 și -17 este egală cu -60 . A F
- (7p) 2. Numărul întreg $(-1)^{100}$ este egal cu -1 . A F
- (7p) 3. Produsul numerelor întregi 4 și -25 este egal cu -100 . A F

Lecția 11. Ecuații în \mathbb{Z}



Citesc și rețin



O egalitate de forma $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$), unde a , b , $c \in \mathbb{Z}$ și $x \in \mathbb{Z}$ se numește **ecuație cu o necunoscută**.

Numerele întregi a , b și c se numesc coeficienți, iar numărul întreg x se numește necunoscută sau variabilă.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{Z}$ se numește **soluție** a ecuației $ax + b = c$, ($a \neq 0$) și $x \in \mathbb{Z}$ dacă $au + b = c$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația $ax + b = c$, ($a \neq 0$) și $x \in \mathbb{Z}$ înseamnă a determina mulțimea de soluții $S = \{u \in \mathbb{Z} \mid au + b = c\}$.

Definiție: Două ecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.



Cum se aplică?

1. Verificați dacă numărul întreg -3 este soluție pentru ecuația:

a) $6 : x = -2$;

b) $1 - 2x = 5$.

Soluție:

a) $6 : x = -2 \Rightarrow 6 : (-3) = -2 \Rightarrow -2 = -2$ (A), deci -3 este soluție;

b) $1 - 2x = 5 \Rightarrow 1 - 2 \cdot (-3) = 5 \Rightarrow 1 + 6 = 5 \Rightarrow 7 = 5$ (F), deci -3 nu este soluție.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $3x + 1 = -2$;

b) $x : (-5) = -4$.

Soluție:

a) $3x + 1 = -2 \Leftrightarrow 3x = -2 - 1 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = (-3) : 3 \Leftrightarrow x = -1$;

b) $x : (-5) = -4 \Leftrightarrow x = (-4) \cdot (-5) \Leftrightarrow x = 20$.

3. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuațiile următoare:

a) $28 : (-x) + 5 = -9$;

b) $5(9 - 2x) = 25 - 6x$.

Soluție:

a) $28 : (-x) + 5 = -9 \Leftrightarrow 28 : (-x) = -9 - 5 \Leftrightarrow 28 : (-x) = -14 \Leftrightarrow -x = 28 : (-14) \Leftrightarrow \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$;

b) $5(9 - 2x) = 25 - 6x \Leftrightarrow 45 - 10x = 25 - 6x \Leftrightarrow -10x + 6x = 25 - 45 \Leftrightarrow -4x = -20 \Leftrightarrow x = (-20) : (-4) \Leftrightarrow x = 5$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Verificați dacă numărul întreg -2 este soluție pentru ecuația:

a) $x + 7 = 5$;

b) $4x = -10$;

c) $-7x = 14$;

d) $8 - x = 6$;

e) $18 : (-x) = 9$;

f) $5x = x - 8$;

g) $3(x - 1) = 9$;

h) $x : (-2) = 12$.

10. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

a) $2(5 - x) = 3x$;

b) $5(x + 6) = 2x$;

c) $8(7 - x) = 6x$;

d) $3(2x + 4) = 4x$;

e) $5(2x - 4) = 6x$;

f) $2(4x + 5) = 3x$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

11. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $5(2x + 3) = 7x - 21$;

b) $4(3x - 2) = 8x - 28$;

c) $3(19 - x) = 4x - 13$;

d) $6(15 - x) = 2x + 34$;

e) $8 - 4x = 2(14 + 3x)$;

f) $6 + 7x = 3(12 + 4x)$.

12. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $5(2x - 3) = 4(3x + 7) - 13$;

b) $7(3x - 4) + 19 = 3(5x - 7)$;

c) $6(5 - 3x) = 20 - 5(4 + 3x)$;

d) $2(11 - 3x) = 16 - 3(8 - 3x)$.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $(-3)^3 \cdot [(-7)^2 - 10x] = (-3)^4 x$;

b) $(-4)^3 \cdot [(-5)^3 + 13x] = (-2)^5 x$;

c) $(-2)^5 \cdot [3x + (-3)^2 \cdot 7] = (-2)^4 x$;

d) $(-5)^2 \cdot [2x - (-2)^3] = (-4)^2 \cdot 3x$.

14. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $|7x - 1| = 6$;

b) $|4x + 3| = 5$;

c) $|5x + 1| = 4$;

d) $|7 - 2x| = 19$;

e) $|2 - 3x| = 13$;

f) $|9 + 2x| = 31$.

15. Rezolvați în \mathbb{Z} următoarele ecuații:

a) $2[23 + 3(|x| - 7)] = 10|x|$;

b) $5[29 - 4(8 - |x|)] = 15|x|$;

c) $2[11 - 3(2|x| - 1)] = -5|x|$;

d) $2[25 + 2(1 - 3|x|)] = -3|x|$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

16. Rezolvați ecuațiile următoare, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $|1 - 2x| + |8x - 4| = 15$;

b) $|3x - 1| - |3 - 9x| = -8$.

17. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

$$9(1 + x) + 9(11 - 2x) + \dots + 9(\underbrace{111\dots1}_{100 \text{ de cifre}} - 100x) = 18 + 108 + \dots + \underbrace{1000\dots08}_{101 \text{ cifre}}.$$



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $1 + 6x = 13$;

b) $10x = 70$;

c) $x : (-8) = 10$.

(3p) 2. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$.

a) $3(2x + 8) = -6$;

b) $5x + 4 = 2x - 8$;

c) $4(2 - x) = x - 2$.

(3p) 3. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația: $2[21 - 3(5 - 2x)] = 0$.

Model de test pentru Evaluarea Națională

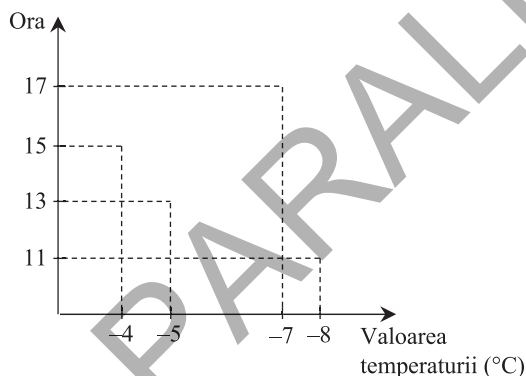
Capitolul: Mulțimea numerelor întregi

PARCUL NAȚIONAL PIATRA CRAIULUI

Parcul Național Piatra Craiului este situat în zona estică a Carpaților Meridionali, pe teritoriul județelor Argeș și Brașov. Clima în masivul muntos Piatra Craiului este asemănătoare cu clima regiunilor înalte din Carpații Meridionali fiind influențată de altitudine și orientarea creștelor față de soare.

Pentru a răspunde la cerințele 1-3, citiți următorul text:

În masivul muntos Piatra Craiului, valoarea medie anuală a temperaturii este cuprinsă între 2°C în partea inferioară și -1°C pe creste. În graficul următor sunt prezentate valorile temperaturii înregistrate într-un interval de timp de 6 ore într-o zi din luna aprilie.



Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Conform informațiilor din tabel temperatura minimă înregistrată în intervalul de timp 11-17 a fost la ora:
A. 11; B. 17; C. 13; D. 15.
- Conform informațiilor din tabel variația temperaturii în intervalul de timp 11-17 a fost de:
A. -2°C ; B. -3°C ; C. -4°C ; D. -5°C .
- Conform informațiilor din tabel media temperaturii în intervalul de timp 11-17 a fost egală cu:
A. -3°C ; B. -4°C ; C. -5°C ; D. -6°C .

Pentru a răspunde la cerințele 4-6, citiți următorul text:

După terminarea clasei a V-a, Ștefan împreună cu părinții lui au mers într-o excursie în Parcul Național Piatra Craiului. Obiectivul excursiei era escaladarea vârfului Pietricica cu înălțimea de 1764 m. Se știe că vârsta lui Ștefan este un număr prim de două cifre identice, suma dintre vârsta lui Ștefan și vârstele părinților lui este egală cu cel mai mare număr prim de două cifre consecutive, iar vârsta mamei și vârsta tatălui său sunt numere întregi pare și consecutive.

Capitolul IV

MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Lecția 14. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional



Citesc și rețin

Definiție: Orice pereche de numere naturale (a, b) , $a \neq 0$, $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ reprezintă un număr rațional pozitiv.

Orice fracție echivalentă cu fracția $\frac{a}{b}$ reprezintă același număr rațional pozitiv, prin urmare mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ reprezintă numărul rațional pozitiv $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Mulțimea $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$ reprezintă numărul rațional pozitiv $\frac{1}{2}$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se notează cu \mathbb{Q}_+ .

Definiție: Dacă $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$) este un număr rațional pozitiv, numărul $-\frac{a}{b}$ îl vom numi număr rațional negativ.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează cu \mathbb{Q}_- .

Reuniunea mulțimilor \mathbb{Q}_- , $\{0\}$ și \mathbb{Q}_+ se numește mulțimea numerelor raționale și se notează cu \mathbb{Q} . În concluzie: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

Definiție: O pereche de numere întregi (a, b) , $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ reprezintă un număr rațional.

Observații:

- Între mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} și \mathbb{Q} au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Orice număr rațional poate fi reprezentat printr-o fracție ordinară sau printr-o fracție zecimală finită sau infinită periodică (simplă sau mixtă).
- Transformarea unei fracții ordinare în fracție zecimală și transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară au fost predate în clasa a V-a.

4. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{103}{100} = \dots$; b) $\frac{51}{100} = \dots$; c) $\frac{29}{100} = \dots$; d) $\frac{801}{100} = \dots$;
e) $\frac{1103}{100} = \dots$; f) $-\frac{9}{100} = \dots$; g) $-\frac{7}{100} = \dots$; h) $\frac{5161}{100} = \dots$.

5. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{4019}{1000} = \dots$; b) $\frac{803}{1000} = \dots$; c) $\frac{207}{1000} = \dots$; d) $\frac{6421}{1000} = \dots$;
e) $-\frac{53}{1000} = \dots$; f) $-\frac{9}{1000} = \dots$; g) $-\frac{7}{1000} = \dots$; h) $-\frac{81}{1000} = \dots$.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\left| \frac{17}{31} \right| = \frac{17}{31}$; b) $\left| -\frac{4}{5} \right| = -\frac{4}{5}$; c) $\left| -\frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}$;
d) $\left| -\frac{2}{5} \right| = \frac{2}{5}$; e) $\left| \frac{19}{24} \right| = \left| -\frac{19}{24} \right|$; f) $\left| \frac{7}{6} \right| = -\frac{7}{6}$;

Exerciții și probleme de dificultate redusă

7. Scrieți opusele următoarelor numere raționale:

a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $-\frac{8}{5}$; d) $-\frac{4}{3}$;
e) $\frac{11}{8}$; f) $-\frac{26}{17}$; g) $-\frac{16}{35}$; h) $\frac{41}{72}$.

8. Calculați:

a) $\left| \frac{7}{6} \right|$; b) $\left| -\frac{8}{3} \right|$; c) $\left| -\frac{5}{9} \right|$; d) $\left| \frac{2}{5} \right|$;
e) $\left| \frac{34}{15} \right|$; f) $\left| -\frac{72}{13} \right|$; g) $\left| -\frac{25}{16} \right|$; h) $\left| \frac{81}{98} \right|$.

9. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{71}{5}$; c) $\frac{9}{4}$; d) $\frac{8}{25}$; e) $\frac{51}{50}$; f) $\frac{4}{5}$; g) $\frac{27}{4}$; h) $\frac{1}{8}$.

10. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{13}{3}$; b) $\frac{25}{9}$; c) $\frac{37}{9}$; d) $\frac{56}{3}$; e) $\frac{22}{15}$; f) $\frac{73}{18}$; g) $\frac{61}{24}$; h) $\frac{97}{30}$.

11. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 6,5; b) 0,24; c) 17,5; d) 5,04;
e) 1,125; f) 0,016; g) 0,0048; h) 0,0375.

12. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

- a) 0,(3); b) 0,(6); c) 7,(3); d) 5,(6);
e) 4,(18); f) 0,(36); g) 1,(03); h) 2,(54).

13. Calculați:

- a) $\left|2\frac{1}{4}\right| - \left|-\frac{1}{4}\right|$; b) $\left|1\frac{2}{5}\right| + \left|-\frac{8}{5}\right|$; c) $\left|-2\frac{5}{6}\right| - \left|-\frac{5}{6}\right|$; d) $\left|-\frac{7}{8}\right| + \left|3\frac{1}{8}\right|$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

14. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

- a) 0,1(3); b) 0,1(6); c) 1,2(6); d) 2,2(3);
e) 14,8(3); f) 1,02(7); g) 0,24(54); h) 0,2(387).

15. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere raționale:

- a) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{11}{4}$; b) $\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{25}{6}, \frac{16}{3}$;
c) $-\frac{11}{6}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{6}$; d) $\frac{5}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{27}{10}, -\frac{9}{2}$.

16. Determinați partea întreagă și partea fracționară scrisă sub forma zecimală pentru numărul rațional:

- a) $\frac{12}{25}$; b) 2,75; c) 41,(3); d) 1,(54); e) -5,(6); f) $-\frac{11}{6}$.

17. Calculați:

- a) $|-0,(3)| + \left|2\frac{2}{3}\right|$; b) $\left|-3\frac{2}{3}\right| - |-1,(3)|$; c) $\left|3\frac{1}{3}\right| - |-1,(6)|$;
d) $|3,1(6)| - \left|-2\frac{5}{6}\right|$; e) $|-0,6(1)| + \left|-3\frac{7}{18}\right|$; f) $\left|-5\frac{1}{6}\right| - |4,8(3)|$.

18. Determinați a 75-a zecimală a următoarelor numere raționale:

- a) 17,(2); b) 40,(5); c) 1,(24); d) 5,(75);
e) 802,(107); f) 300,2(58); g) 10,1(203); h) 1,73(425).

19. Determinați numărul întreg x pentru care următoarea fracție ordinară este echiunitară:

- a) $\frac{2x-19}{4x-11}$; b) $\frac{7x+14}{3x+26}$; c) $\frac{3x+27}{8x-18}$.

20. Se consideră numerele raționale $a = \overline{x,(yx)} + \overline{y,(xy)}$ și $b = \overline{x,y(x)} + \overline{y,x(y)}$, unde $x \neq 0, y \neq 0$ și $x \neq y$. Arătați că $a = b$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Determinați numărul întreg n pentru care următoarele fracții ordinare sunt echivalente:

- a) $\frac{4}{2n-2}, \frac{7}{4n-1}$; b) $\frac{3n-3}{4}, \frac{2n+5}{5}$; c) $\frac{3}{4n-7}, \frac{6}{5n+4}$.

22. Arătați că pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, fracția ordinară $\frac{n^2 + n - 2}{n^2 - n + 2}$ este reductibilă.

23. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele fracții sunt ireductibile:

a) $\frac{2n+3}{3n+4}$; b) $\frac{5n+9}{4n+7}$; c) $\frac{6n+1}{8n+1}$.

24. Determinați numărul natural \overline{ab} , $a \neq 0$, care îndeplinește condiția: $\frac{\overline{ab}}{a} = \overline{10, b(a)}$.

25. Aflați cifrele a, b și c ($a \neq 0, c \neq 0$) pentru care are loc egalitatea: $\frac{\overline{ab}}{c} = 13, a(b)$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \dots, \frac{1001}{1002} \right\}$. Determinați mulțimea

$$B = \left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} \text{ este reductibilă, } \frac{a}{b} \in A \right\}.$$

27. Arătați că fracția ordinară $\frac{2^{102} + 3^{201}}{2^{201} - 3^{102}}$ este reductibilă și reprezintă un număr rațional pozitiv.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{7}{10}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{5}{6}$.

(3p) 2. Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare ireductibile:

a) 2,25; b) 0,(72); c) 1,6(1).

(3p) 3. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului rațional:

$$a = (|-2,1(3)| - |1,(6)|) : |-0,(3)|.$$

Lecția 15. Compararea numerelor raționale



Citesc și rețin

Numărul rațional a este mai mic decât numărul rațional b dacă punctul $A(a)$ este situat pe axa numerelor în stânga punctului $B(b)$. Notăm $a < b$ sau $b > a$.

Observații:

1. Oricare două numere raționale a și b pot fi comparate, adică ele se găsesc în una dintre situațiile $a > b$ sau $a = b$ sau $a < b$.

**Lecția 22. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$,
 $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$), unde a, b și c
sunt numere raționale**



Citesc și rețin

O egalitate de forma: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, și $x \in \mathbb{Q}$ se numește **ecuație cu o necunoscută**.

Numerele raționale a, b și c se numesc coeficienți, iar numărul rațional x se numește necunoscută sau variabilă.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{Q}$ se numește **soluție** a ecuației $ax + b = c$ ($a \neq 0$) și $x \in \mathbb{Q}$ dacă $au + b = c$ (spunem că u verifică ecuația).

A **rezolva** ecuația $ax + b = c$ ($a \neq 0$) și $x \in \mathbb{Q}$ înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{Q} \mid au + b = c\}.$$

Definiție: Două ecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.



Cum se aplică?

1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $\frac{25}{18}x = -\frac{20}{27}$;

b) $0,8 : x = 1, (3)$;

c) $\frac{1}{4} + x = 1\frac{3}{4}$.

Soluție:

a) $\frac{25}{18}x = -\frac{20}{27} \Leftrightarrow x = -\frac{20}{27} : \frac{25}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{20}{27} \cdot \frac{18}{25} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{15}$;

b) $0,8 : x = 1, (3) \Leftrightarrow \frac{8}{10} : x = 1\frac{3}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{5} : x = 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{5} : x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} : \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{4} + x = 1\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2\frac{1}{4} + x = \frac{5}{6}$;

b) $3(7 - 4x) = 5$;

c) $\frac{1-x}{4} + \frac{2}{7} = \frac{x}{2}$.

Soluție:

a) $2\frac{1}{4} + x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} - 2\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} - \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{10}{12} - \frac{27}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{17}{12} \Leftrightarrow x = -1\frac{5}{12}$;

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } 3(7 - 4x) = 5 \Leftrightarrow 21 - 12x = 5 \Leftrightarrow -12x = 5 - 21 \Leftrightarrow -12x = -16 \Leftrightarrow x = \\
 & = \frac{-16^{(4)}}{-12} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}; \\
 & \text{c) } \frac{1-x}{4} + \frac{2}{7} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 7 - 7x + 8 = 14x \Leftrightarrow -7x - 14x = -7 - 8 \Leftrightarrow -21x = -15 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{-15^{(3)}}{-21} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}.
 \end{aligned}$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Verificați dacă numărul rațional $\frac{1}{4}$ este soluție pentru următoarele ecuații:

- a) $100x = 25$; b) $\frac{6}{5}x = \frac{3}{10}$; c) $4x + 1 = 0$;
d) $2 : x - 3 = 5$; e) $x + \frac{1}{4} = 0,5$; f) $2(1 - 2x) = 1$.

e)																				
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Rezolvați ecuațiile următoare, unde x este număr rațional:

- a) $8x = 6$; b) $4x = 10$; c) $6x = 15$; d) $9x = 3$;
e) $12x = -21$; f) $-20x = 28$; g) $-8x = -12$; h) $-6x = -15$.

f)	$-20x = 28 \Leftrightarrow$																			
g)	$-8x = -12 \Leftrightarrow$																			

3. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor raționale:

- a) $x + 7 = 9$; b) $x - 3 = 7$; c) $x - 8 = 5$; d) $x + 2 = 7$;
e) $14 + x = 31$; f) $21 - x = 12$; g) $43 + x = -1$; h) $39 - x = -6$.

f)	$21 - x = 12 \Leftrightarrow$																			
g)	$43 + x = -1 \Leftrightarrow$																			

4. Rezolvați ecuațiile următoare, unde $x \in \mathbb{Q}$:

- a) $\frac{4}{3}x = \frac{5}{9}$; b) $\frac{5}{2}x = \frac{3}{8}$; c) $\frac{6}{7}x = \frac{8}{5}$;

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $12x + 10 = 7x + 21$; b) $8x - 26 = 14x - 35$; c) $10x - 41 = 3x - 27$;
d) $14x + 7 = 20x - 17$; e) $5x + 17 = 13x - 15$; f) $15x + 12 = 11x + 9$.

12. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $3,(6) - 3x = 0,1(3) - 2x$; b) $7x - 3,2(6) = 0,(3) + 6x$;
c) $1,8(3) - 3x = -0,(03) - x$; d) $15x - 0,(36) = 8x + 0,1(6)$.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $3(2x - 11) = 2x - 41$; b) $11x - 1 = 4(7x + 5)$; c) $5(1 - 4x) = -7 - 16x$;
d) $2(5x - 4) = 7x - 20$; e) $20x + 13 = 6(5x - 7)$; f) $5(8 - 3x) = 20x - 10$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale următoarele ecuații:

a) $\frac{7}{5}\left(1 + \frac{3}{7}x\right) = x$; b) $\frac{5}{3}\left(2 - \frac{1}{5}x\right) = x$; c) $\frac{3}{7}\left(3 - \frac{5}{3}x\right) = x$;
d) $\frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{6} : x\right) = \frac{6}{5}$; e) $\frac{2}{5}\left(3 + \frac{1}{4} : x\right) = \frac{4}{3}$; f) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} : x - 7\right) = -\frac{5}{2}$.

15. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2(x - 24) + 113 = 3(15 - x)$; b) $4(5x - 7) + 21 = 3(6x - 11)$;
c) $56 - 4(11 - 3x) = 6(5x - 4)$; d) $55 - 5(4x - 1) = 10(3x - 3)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $1,25 \cdot [0,(6)x - 0,4] = x$; b) $7,5 \cdot [0,0(6)x - 0,25] = x$;
c) $0,4 \cdot [1,(6)x + 1,25] = x$; d) $2,5 \cdot [0,1(3)x - 0,16] = x$;
e) $1,2 \cdot [0,(3)x + 0,75] = x$; f) $0,75 \cdot [0,8(3)x + 0,4] = x$.

17. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $\frac{5x-2}{6} = \frac{x}{2} + \frac{4}{9}$; b) $\frac{3x-2}{4} + \frac{5}{7} = \frac{x}{2}$; c) $\frac{2x-1}{6} = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$;
d) $\frac{4x+3}{5} = x + \frac{9}{10}$; e) $\frac{x}{3} = \frac{8x+7}{10} - \frac{1}{6}$; f) $\frac{x}{4} = \frac{4-5x}{12} - \frac{5}{9}$.

18. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Q}$:

a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$; b) $\left|x + \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3}$; c) $\left|x - \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4}$;
d) $\left|\frac{3}{4} - x\right| = 1\frac{5}{6}$; e) $\left|\frac{2}{5} + x\right| = 2\frac{1}{4}$; f) $\left|\frac{5}{9} - x\right| = 3\frac{1}{6}$.

19. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{2}{3} - x \right) + \frac{3}{2} \right] = \frac{7x}{2}$;

b) $\left[\left(x + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{3} \right] \cdot \frac{3}{2} = \frac{5x}{3}$.

20. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Q}$:

a) $|1, (6)x - 0,2(7)| - x = 1\frac{4}{9}$;

b) $|0,3(8) - 2,(3)x| + x = 1\frac{1}{6}$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

21. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația $\frac{x+1}{2} + \frac{2x+1}{3} + \frac{3x+1}{4} + \dots + \frac{nx+1}{n+1} = n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația $\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \frac{3}{x^2-x+3} + \dots + \frac{100}{x^2-x+100} = 100$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $-1\frac{13}{14}x = -1\frac{17}{28}$;

b) $x : 1,8 = 1,(6)$;

c) $1\frac{2}{5} + x = \frac{4}{5}$.

(3p) 2. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuațiile:

a) $4(2x + 5) = 3x$;

b) $\frac{4}{9} - \frac{2}{3}x = \frac{23}{18}$;

c) $0,2[1,(6)x - 2,5] = x$.

(3p) 3. Rezolvați ecuația $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{7} - \frac{x-4}{2} \right) = \frac{x}{8}$, unde $x \in \mathbb{Q}$.

Lecția 23. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor



Citesc și rețin

Rezolvarea unei probleme cu ajutorul ecuației presupune parcurgerea următoarelor etape:

- identificarea și notarea necunoscutei (identificarea necunoscutelor);
- punerea problemei în ecuație (modelul matematic);
- rezolvarea ecuației și verificarea soluției;
- analiza și interpretarea rezultatului.

GEOMETRIE

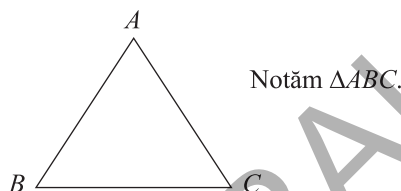
Capitolul II TRIUNGHIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare



Citesc și rețin

Definiție: Fiind date trei puncte necoliniare A , B și C , se numește **triunghi** determinat de punctele A , B , C reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CA$.



Punctele A , B și C se numesc **vârfurile** triunghiului, segmentele AB , BC și CA se numesc **laturile** triunghiului, iar unghiurile A , B și C se numesc **unghiurile** triunghiului.

Observații:

1. Latura AB se opune unghiului C , latura BC se opune unghiului A , iar latura CA se opune unghiului B .
2. Unghiul A se opune laturii BC , unghiul B se opune laturii AC , iar unghiul C se opune laturii AB .

A. Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

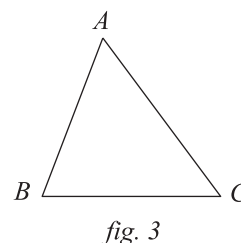
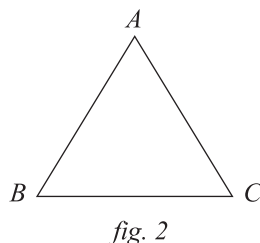
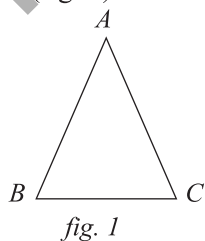
Definiții:

1. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi **isoscel** (fig. 1).

Observație: Latura triunghiului isoscel care nu este congruentă cu celelalte două se numește **bază**.

2. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește triunghi **echilateral** (fig. 2).

3. Triunghiul care are laturile de lungimi diferite se numește triunghi **oarecare** sau **scaln** (fig. 3).



B. Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

Definiții:

1. Triunghiul care are cele trei unghiuri ascuțite se numește triunghi **ascuțitunghic** (fig. 4).
2. Triunghiul care are un unghi drept se numește triunghi **dreptunghic** (fig. 5).
3. Triunghiul care are un unghi obtuz se numește triunghi **obtuzunghic** (fig. 6).

Observație: Pentru triunghiul dreptunghic, latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**, iar celelalte două laturi se numesc **catete**.

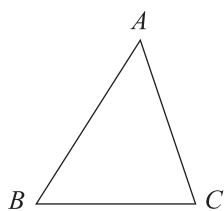


fig. 4

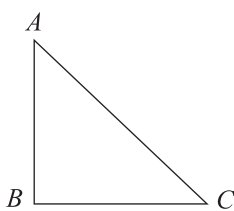


fig. 5

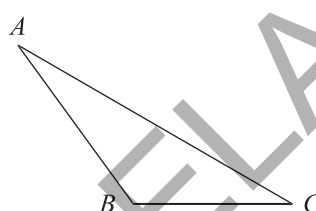


fig. 6

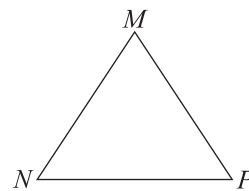


Cum se aplică?

1. Pentru triunghiul MNP reprezentat în figura alăturată precizați:
a) vârfurile; b) laturile; c) unghiurile.

Soluție:

- a) Vârfurile triunghiului MNP sunt punctele M , N și P .
- b) Laturile triunghiului MNP sunt segmentele MN , NP și PM .
- c) Unghiurile triunghiului MNP sunt $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$ și $\sphericalangle PMN$.



2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC , de bază BC . Ce puteți spune despre unghiurile ABC și ACB ?

Soluție:

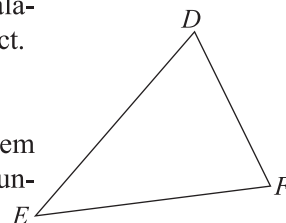
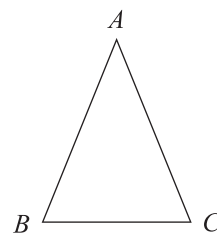
Măsurând unghiurile obținem $\sphericalangle ABC = 67^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 67^\circ$, prin urmare $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB$.

3. Măsurați laturile triunghiului DEF reprezentat în figura alăturată și apoi încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- A. isoscel; B. echilateral; C. scalen.

Soluție:

Măsurând cu rigla gradată laturile triunghiului DEF obținem $DE = 3,2$ cm, $EF = 3,1$ cm și $FD = 2,3$ cm, prin urmare răspunsul corect este C. scalen.



Știu să rezolv

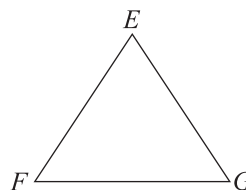
Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele notații:

- a) $\triangle DEF$; b) $\triangle PQR$; c) $\triangle ABC$; d) $\triangle MNP$.

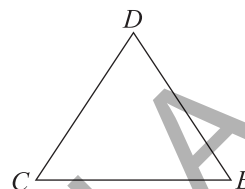
2. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul EFG reprezentat în figura alăturată scrieți:

- a) vârfurile triunghiului
- b) laturile triunghiului
- c) unghiurile triunghiului



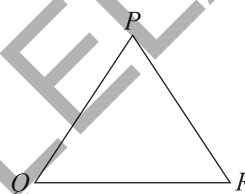
3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În triunghiul CDE din figura alăturată:

- a) latura CD se opune unghiului E ;
- b) latura CE se opune unghiului C ;
- c) latura DE se opune unghiului C .



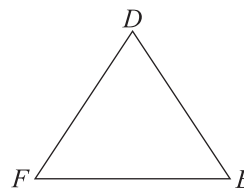
4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În triunghiul PQR din figura alăturată:

- a) unghiul P se opune laturii QR ;
- b) unghiul Q se opune laturii PR ;
- c) unghiul R se opune laturii QR .



5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. În triunghiul DEF reprezentat în figura alăturată:

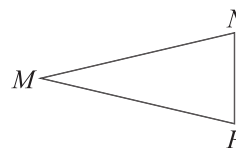
- a) latura DE se opune unghiului
- b) unghiul E se opune laturii
- c) latura DF se opune unghiului
- d) unghiul D se opune laturii
- e) latura EF se opune unghiului
- f) unghiul F se opune laturii



6. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi:

- A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

7. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Baza triunghiului isoscel MNP reprezentat în figura alăturată este latura



8. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă lungimile laturilor triunghiului MNP îndeplinesc condiția $MN \neq NP \neq PM \neq MN$, atunci triunghiul este:

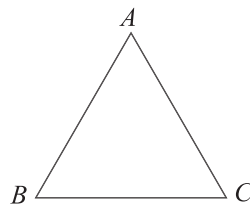
- A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

9. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește:

- A. oarecare; B. isoscel; C. echilateral.

10. a) Măsu­rați unghiurile triunghiului echilateral ABC reprezentat în figura alăturată și apoi completați spațiile punctate cu valorile corespunzătoare:

$\sphericalangle A =$;
 $\sphericalangle B =$;
 $\sphericalangle C =$



b) Folosind rezultatele obținute la a), stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: Dacă ABC este un triunghi echilateral, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

11. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numește ascuțitunghic dacă are:

A. două unghiuri ascuțite; B. un unghi ascuțit; C. trei unghiuri ascuțite.

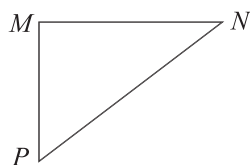
12. Folosind rezultatul problemei 10, stabiliți valoarea de adevăr a propoziției. Triunghiul echilateral este un triunghi ascuțitunghic.

13. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are un unghi drept se numește:

A. echilateral; B. dreptunghic; C. obtuzunghic.

14. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul dreptunghic MNP reprezentat în figura alăturată precizați:

a) unghiul drept;
 b) ipotenuza;
 c) catetele



15. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numește obtuzunghic dacă are:

A. un unghi drept; B. un unghi ascuțit; C. un unghi obtuz.

Exerciții și probleme de dificultate redusă

16. Construiți triunghiul DEF . Scrieți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului DEF .

17. Construiți triunghiul MNP .

a) Scrieți unghiurile care se opun laturilor MN , NP , respectiv PM .
 b) Scrieți laturile care se opun unghiurilor M , N , respectiv P .

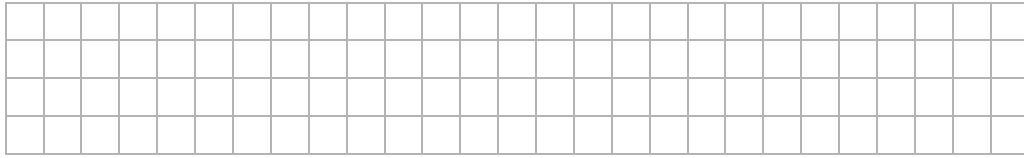
18. Construiți triunghiul ABC dreptunghic în C și apoi precizați ipotenuza și catetele acestuia.

19. Construiți triunghiul dreptunghic DEF cu măsura $\sphericalangle D = 90^\circ$ și măsurați laturile acestuia. Ce puteți spune despre laturile:

a) EF și DE ? b) EF și DF ?

20. Construiți triunghiul MNP și notați cu Q și R simetricile punctelor N , respectiv P față de punctul M . Ce puteți spune despre:

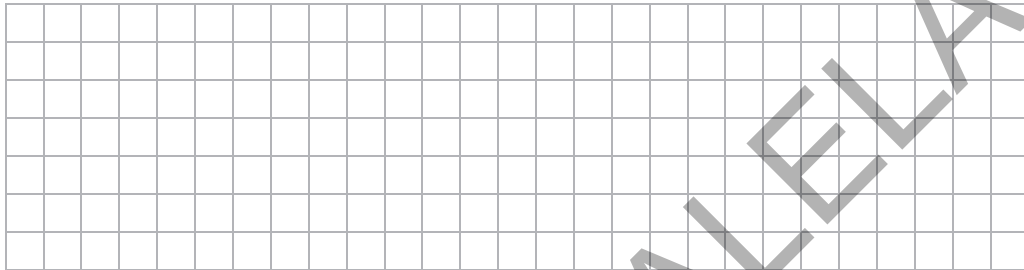
a) unghiurile N și Q ? b) laturile NP și QR ? c) unghiurile P și R ?



V. În triunghiul ABC , bisectoarele unghiurilor B și C se intersectează în punctul I și $AI \cap BC = \{D\}$. Se știe că $\sphericalangle BID = 50^\circ$ și $\sphericalangle CID = 62^\circ$.

(8p) a) Determinați $\sphericalangle BAC$.

(8p) b) Determinați $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$.



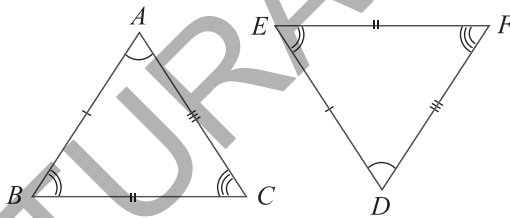
Lecția 12. Congruența triunghiurilor oarecare



Citesc și rețin

În general, despre două figuri geometrice spunem că sunt congruente, dacă prin suprapunere coincid.

Definiție: Triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle DEF$, în care $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$, $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$ și $CA \equiv FD$, se numesc triunghiuri **congruente**.



Notăm $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Laturile, respectiv unghiurile congruente a două triunghiuri congruente se numesc elemente **omoloage**.

Observație: În triunghiuri congruente, la laturi congruente se opun unghiuri congruente, respectiv la unghiuri congruente se opun laturi congruente.



Cum se aplică?

1. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 55^\circ$ și $\sphericalangle C = 85^\circ$, aflați măsurile unghiurilor D , E și F .

Exerciții și probleme de dificultate medie

12. Triunghiurile ABC și DEF au următoarele proprietăți: $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$, $CA \equiv FD$, măsurile unghiurilor A , B și C sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4, iar măsurile unghiurilor D , E și F sunt invers proporționale cu numerele 6, 4 și 3. Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

13. Se consideră triunghiurile ABC și MNP . Știind că $\mathcal{P}_{ABC} = \mathcal{P}_{MNP}$, $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$ și $\frac{\sphericalangle A}{\sphericalangle M} = \frac{\sphericalangle B}{\sphericalangle N} = \frac{\sphericalangle C}{\sphericalangle P}$, arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

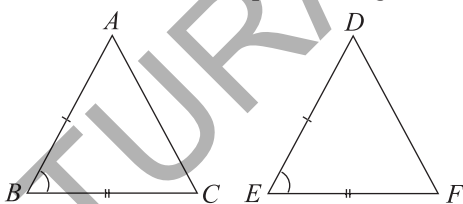
- (3p) **1.** Știind că $\triangle DEF \equiv \triangle MNP$, scrieți relațiile de congruență dintre elementele omoloage ale celor două triunghiuri.
- (3p) **2.** Știind că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, $MN = 12$ cm, $MP = 13$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 40$ cm, aflați lungimea laturii NP .
- (3p) **3.** Știind că $\triangle ABC \equiv \triangle EDF$, $\sphericalangle B = 56^\circ$ și $\sphericalangle F = 77^\circ$, determinați $\sphericalangle A$.

Lecția 13. Criteriile de congruență a triunghiurilor



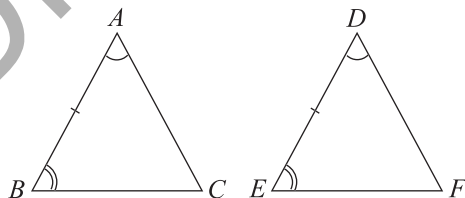
Citesc și rețin

Criteriul de congruență L.U.L.: Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de acestea respectiv congruente sunt congruente.



$$\left. \begin{array}{l} AB \equiv DE \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \\ BC \equiv EF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Criteriul de congruență U.L.U.: Două triunghiuri care au câte o latură și unghiurile alăturate acestuia respectiv congruente sunt congruente.



$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D \\ AB \equiv DE \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Lecția 18. Proprietăți ale triunghiului isoscel

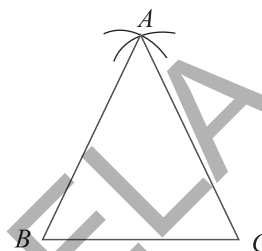


Citesc și rețin

Definiție: Triunghiul care are două laturi congruente se numește **triunghi isoscel**. (Cea de-a treia latură se numește **baza** triunghiului isoscel.)

Construcție

Construcția unui triunghi isoscel ABC de bază BC se realizează cu ajutorul riglei și compasului astfel: construim baza BC și luăm în compas o deschidere mai mare sau mai mică decât lungimea acestei laturi, apoi cu vârful ascuțit al compasului în B , respectiv C construim două arce de cerc al căror punct de intersecție este vârful A al triunghiului isoscel ABC .



Proprietăți

Teorema 1: Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

Teorema 2: Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Teorema 3: Bisectoarea unghiului opus bazei unui triunghi isoscel este identică cu înălțimea, mediana și mediatoarea corespunzătoare acesteia.

Teorema 4: Dacă într-un triunghi bisectoarea unui unghi este identică cu înălțimea corespunzătoare laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel.

Teorema 5: Dacă într-un triunghi bisectoarea unui unghi este identică cu mediana corespunzătoare laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel.

Teorema 6: Dacă într-un triunghi înălțimea corespunzătoare unei laturi este identică cu mediana corespunzătoare laturii respective, atunci triunghiul este isoscel.



Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$. Știind că:

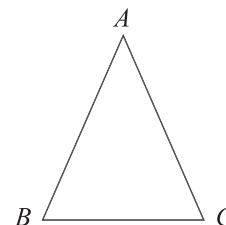
a) $\sphericalangle B = 54^\circ$, aflați $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle A$;

b) $\sphericalangle A = 38^\circ$, aflați $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$.

Soluție:

a) $AB \equiv AC$, deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, prin urmare $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 54^\circ$. În $\triangle ABC$ avem: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ sau $\sphericalangle A + 54^\circ + 54^\circ = 180^\circ$, așadar $\sphericalangle A + 108^\circ = 180^\circ$, deci $\sphericalangle A = 180^\circ - 108^\circ$ și obținem $\sphericalangle A = 72^\circ$.

b) $AB \equiv AC$, deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. În $\triangle ABC$ avem: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ sau $38^\circ + 2 \sphericalangle B = 180^\circ$, așadar $2 \sphericalangle B = 180^\circ - 38^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle B = \frac{142^\circ}{2}$ și obținem $\sphericalangle B = 71^\circ$, prin urmare



2. Fie DEF un triunghi care are perimetrul egal cu 53 cm și $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$. Dacă:
 a) $DE = 17$ cm, aflați DF și EF ; b) $EF = 15$ cm, aflați DE și DF .

Soluție:

a) $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$, deci $DE \equiv DF$, prin urmare $DF = 17$ cm; $\mathcal{P}_{DEF} = 53$ cm sau $DE + EF + FD = 53$ cm, așadar 17 cm + EF + 17 cm = 53 cm, deci $EF + 34$ cm = 53 cm, de unde rezultă că $EF = 53$ cm - 34 cm și obținem $EF = 19$ cm;

b) $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$, deci $DE \equiv DF$; $\mathcal{P}_{DEF} = 53$ cm sau $DE + EF + FD = 53$ cm, deci $2DE + 15$ cm = 53 cm, de unde rezultă că $2DE = 38$ cm, așadar $DE = \frac{38 \text{ cm}}{2}$ și obținem $DE = 19$ cm, prin

urmare $DF = 19$ cm.

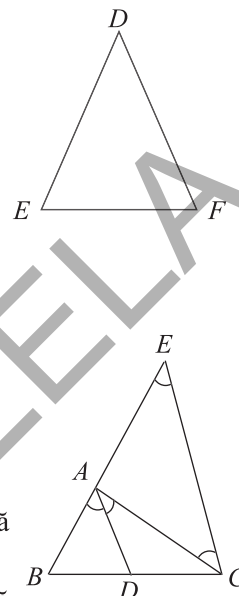
3. În triunghiul ABC cu $AB \neq AC$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ intersectează latura BC în punctul D . Dacă paralela construită prin C la bisectoarea AD intersectează dreapta AB în punctul E , arătați că $\triangle AEC$ este isoscel.

Soluție:

Deoarece BE este secantă a dreptelor paralele AD și EC , rezultă că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BEC$ (1).

Deoarece AC este secantă a dreptelor paralele AD și EC , rezultă că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACE$ (2).

Din (1) și (2), deoarece $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, deducem că $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle ACE$, prin urmare $\triangle AEC$ este isoscel.

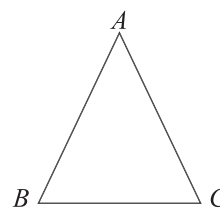


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

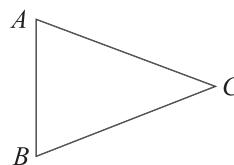
1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$;
 b) $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;
 c) $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$.



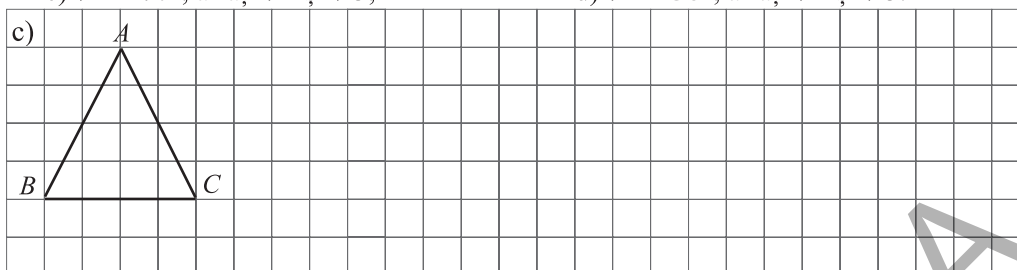
2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC care are $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $AB \equiv AC$;
 b) $AB \equiv BC$;
 c) $CA \equiv CB$.



3. Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$. Știind că:

- a) $\sphericalangle B = 50^\circ$, aflați $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle A$; b) $\sphericalangle C = 43^\circ$, aflați $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle A$;
 c) $\sphericalangle A = 70^\circ$, aflați $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$; d) $\sphericalangle A = 38^\circ$, aflați $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$.



Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$. Calculați perimetrul triunghiului DEF , știind că:

- a) $DE = 12$ cm și $EF = 7$ cm; b) $EF = 10$ cm și $FD = 8$ cm.

5. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ și perimetrul de 30 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului ABC dacă:

- a) $AB = 12$ cm; b) $AC = 14$ cm; c) $BC = 13$ cm; d) $BC = 11$ cm.

6. Se consideră triunghiul ABC . Știind că $\sphericalangle A = 40^\circ$ și $\sphericalangle C = 70^\circ$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

7. Un triunghi isoscel de perimetru \mathcal{P} are lungimea bazei egală cu $\frac{1}{4}\mathcal{P}$. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că:

- a) $\mathcal{P} = 28$ cm; b) $\mathcal{P} = 36$ cm.

8. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$, bisectoarele unghiurilor B și C se intersectează în punctul I . Dacă $\sphericalangle BIC = 142^\circ$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

9. Un triunghi isoscel cu perimetrul de 11 cm are lungimile laturilor exprimate prin numere prime. Aflați lungimile laturilor triunghiului isoscel.

10. Se consideră triunghiul MNP cu $MN \equiv MP$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că:

- a) $\sphericalangle M = 4\sphericalangle N$; b) $\sphericalangle P = 4\sphericalangle M$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Se consideră triunghiul ascuțitunghic MNP , cu $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, și notăm cu H ortocentrul acestuia. Știind că $\sphericalangle NHP = 134^\circ$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNP .

12. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului isoscel DEF , știind că:

- a) $\sphericalangle D = 50^\circ$; b) $\sphericalangle D = 36^\circ$.

13. Aflați lungimile laturilor triunghiului isoscel MNP cu perimetrul de 60 cm, știind că:

- a) $MN = 18$ cm; b) $MN = 24$ cm.

14. Se consideră triunghiul PQR cu $\sphericalangle Q \equiv \sphericalangle R$. Determinați lungimile laturilor triunghiului în următoarele cazuri:

a) $\mathcal{P}_{PQR} = 34$ cm și $QR = \frac{5}{6} PR$;

b) $\mathcal{P}_{PQR} = 35$ cm și $PQ = \frac{3}{4} QR$.

15. Se consideră triunghiul DEF cu $DE \equiv DF$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că:

a) $\sphericalangle D = 40\%$ din $\sphericalangle E$;

b) $\sphericalangle F = 40\%$ din $\sphericalangle D$.

16. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 36^\circ$ și $AB \equiv AC$ construim bisectoarea BD , $D \in AC$. Arătați că triunghiurile ABD și BCD sunt isoscele.

17. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ considerăm punctul D pe latura BC . Dacă mediatoarea segmentului BD intersectează latura AB în punctul E , arătați că $ED \parallel AC$.

18. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AB \equiv AC$ considerăm punctul D pe latura BC diferit de mijlocul acesteia. Perpendiculara construită în punctul D pe latura BC intersectează dreptele AB și AC în punctele E , respectiv F . Arătați că $BC = ED + FD$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

19. În triunghiul DEF cu $DE \equiv DF$ notăm cu M simetricul punctului D față de E și cu N simetricul punctului E față de F . Dacă $MF \cap DN = \{P\}$, arătați că triunghiul PFN este isoscel.

20. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului isoscel ABC , știind că:

a) $\sphericalangle A = 2\sphericalangle B$;

b) $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$.

21. Pe ipotenuza EF a triunghiului dreptunghic DEF se consideră punctele P și Q , astfel încât $EP \equiv ED$, respectiv $FQ \equiv FD$. Determinați $\sphericalangle PDQ$.

22. Aflați lungimile laturilor triunghiului isoscel ABC cu perimetrul de 90 cm, dacă:

a) $AB = \frac{2}{5} BC$;

b) $AB = \frac{4}{7} BC$.

23. Fie C un punct oarecare pe mediatoarea segmentului AB și construim $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă bisectoarea unghiului CAD intersectează dreapta BC în punctul E , arătați că măsura unghiului EAB este constantă.

24. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, construim înălțimea AD , $D \in BC$. Știind că bisectoarele unghiurilor BAD și CAD intersectează latura BC în punctele E , respectiv F , arătați că $EF = AB + AC - BC$.

25. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și măsura $\sphericalangle A = 90^\circ$, considerăm punctele D și E situate pe laturile BC , respectiv AB astfel încât $BD \equiv AC$ și $BE \equiv DC$. Dacă bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul F , arătați că $ED \parallel FC$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Pe latura AB a triunghiului ABC cu $\sphericalangle B = 22^\circ 30'$ și $\sphericalangle C = 67^\circ 30'$ se consideră punctul D , astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABC$. Arătați că $BD = 2AC$.

27. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ considerăm punctele D și E situate pe latura AC respectiv semidreapta DC , astfel încât $DE \equiv AC$ și punctul T situat pe dreapta BC . Arătați că $ET \parallel AB$ dacă și numai dacă $DB \equiv DT$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2023)

28. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ considerăm punctele D și E situate pe latura AC , respectiv semidreapta DA , astfel încât $ED \equiv AC$ și punctul T situat pe latura BC . Arătați că $DT \parallel AB$ dacă și numai dacă $EB \equiv ET$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 5/2011)

29. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 90^\circ$, considerăm punctele D și E situate pe laturile BC , respectiv AB astfel încât $BD \equiv AC$ și $BE \equiv DC$ și punctul F situat pe semidreapta AC astfel încât $AF \equiv BC$. Arătați că punctele E , D și F sunt coliniare.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2018)

30. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B = 30^\circ$ și $\sphericalangle C = 45^\circ$, mediatoarea laturii BC intersectează bisectoarea unghiului ABC în punctul E . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului AEC .

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 11/2002)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Precizați baza triunghiului isoscel DEF , știind că $DE = 4$ m, $DF = 5$ m și $\mathcal{P}_{DEF} = 13$ cm.
- (3p) **2.** În triunghiul ABC , înălțimile corespunzătoare laturilor AB și AC intersectează bisectoarea unghiului exterior cu vârful în A în punctele E , respectiv F . Dacă $CE \cap BF = \{H\}$, arătați că triunghiul HEF este isoscel.
- (3p) **3.** Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 100^\circ$ și punctele D și E situate pe laturile BC , respectiv AB , astfel încât $BD \equiv BA$ și $BE \equiv DC$. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ADE .

Lecția 19. Proprietăți ale triunghiului echilateral

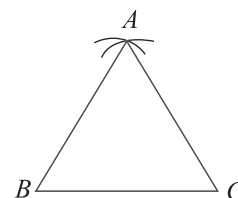


Citesc și rețin

Definiție: Triunghiul care are toate laturile congruente se numește **triunghi echilateral**.

Construcție

Construcția unui triunghi echilateral ABC se realizează cu ajutorul riglei și compasului astfel: construim latura BC și luăm în compas o deschidere egală cu lungimea acestei laturi, apoi cu vârful ascuțit al compasului în punctele B , respectiv C , construim două arce de cerc al căror punct de intersecție este vârful A al triunghiului echilateral ABC .



MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIȚELOR

Capitolele: Mulțimea numerelor întregi, Mulțimea numerelor raționale, Triunghiul

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,7p) 1. Cel mai mare dintre numerele întregi $-75, -81, -73$ și -79 este:
A. -75 ; B. -81 ; C. -73 ; D. -79 .
- (0,7p) 2. Valoarea absolută a numărului rațional $\frac{41}{47}$ este egală cu:
A. $-\frac{41}{47}$; B. $\frac{41}{47}$; C. $\frac{47}{41}$; D. $-\frac{47}{41}$.
- (0,7p) 3. Transformând fracția ordinară $\frac{23}{10^2}$ în fracție zecimală, obținem:
A. 2,30; B. 0,2(3); C. 0,023; D. 0,23.
- (0,7p) 4. Soluția inecuației $x + 7 < 3, x \in \mathbb{Z}$, este:
A. $\{\dots, -6, -5, -4\}$; B. $\{0, 1, 2, \dots\}$; C. $\{4, 5, 6, \dots\}$; D. $\{\dots, -4, -3, -2\}$.
- (0,7p) 5. Suma măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu:
A. 60° B. 100° C. 120° ; D. 90° .
- (0,7p) 6. În triunghiul DEF , cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, construim mediana $DM, M \in EF$. Dacă $DM = 7$ cm, atunci lungimea ipotenuzei EF este egală cu:
A. 12 cm; B. 3,5 cm; C. 14 cm; D. 16 cm.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) 1. Aflați rezultatul calculului $(-18)^5 : \{[(-3) \cdot 5 + (-1)^3] : (-2)^2 - 23\}^3 - (-10)^2$.

(0,8p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația: $\frac{x}{2} - x = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - x \right)$.

(0,8p) 3. Rotunjiți la a treia zecimală numărul rațional:

$$a = \{[1 - 1,(6)]^2 \cdot 1,5 - 1,8(3)\} : 2,8.$$

(0,8p) 4. Triunghiul MNP este isoscel de bază NP . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că $\sphericalangle M = \frac{\sphericalangle N + \sphericalangle P}{4}$.

(0,8p) 5. Se consideră triunghiul DEF . Știind că mediatoarele laturilor DE și DF se intersectează în punctul P situat pe latura EF , determinați măsura unghiului EDF .

- (0,8p) 6. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu perimetrul de 18 cm și punctul D situat pe latura BC . Construim $DE \perp AB$, $E \in AB$ și $DF \perp AC$, $F \in AC$. Lungimile laturilor triunghiului AEF pot fi numere naturale? Justificați răspunsul.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,7p) 1. Suma numerelor întregi 10 și -17 este egală cu:
A. -7 ; B. -27 ; C. 170; D. 27.
- (0,7p) 2. Transformând fracția zecimală $0,(3)$ în fracție ordinară ireductibilă, obținem:
A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{4}{3}$; C. $\frac{3}{2}$; D. $\frac{1}{3}$.
- (0,7p) 3. Cardinalul mulțimii $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$ este egal cu:
A. 4; B. 3; C. 2; D. 1.
- (0,7p) 4. Scriind în ordine crescătoare fracțiile $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{4}$, obținem:
A. $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{4}$; B. $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$; C. $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$; D. $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{5}$.
- (0,7p) 5. Latura triunghiului echilateral cu semiperimetrul de 7,5 cm are lungimea egală cu:
A. 4,5 cm; B. 6 cm; C. 5 cm; D. 3,5 cm.
- (0,7p) 6. Dacă notăm cu G centrul de greutate al triunghiului echilateral MNP , atunci măsura unghiului MGP este egală cu:
A. 120° ; B. 60° ; C. 45° ; D. 180° .

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

- (0,8p) 1. Aflați rezultatul calculului:

$$(-7)^7 : \{[(-2)^4 : (-4) - (-1)^0] + [(-2)^2 \cdot (-4)^4 \cdot (-8)^8] : (-8)^{11}\}^5.$$

- (0,8p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația:

$$3[2(1 - |x|) - 1] > |x| - 11.$$

- (0,8p) 3. Scrieți sub forma cea mai simplă inversul numărului rațional:

$$a = [1,25 \cdot 2, (6) - 4]^7 : [0, (6)]^5 - 1,2(7).$$

- (0,8p) 4. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel sunt numere naturale. Știind că una dintre laturi are lungimea de 4 cm, determinați valoarea minimă a perimetrului triunghiului.

- (0,8p) 5. Semidreapta OD este bisectoarea unghiului EOF și construim $DM \perp OE$, $M \in OE$ și $DN \perp OF$, $N \in OF$. Știind că $OD = DM + DN$, aflați măsura unghiului EOF .

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Cardinalul mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$ este egal cu:
A. 6; B. 8; C. 4; D. 5.
- (0,5p) 2. Raportul numerelor naturale 7 și 5 se scrie:
A. $\frac{7}{5}$; B. $\frac{7^2}{5^2}$; C. $\left(\frac{5}{7}\right)^2$; D. $\frac{5}{7}$.
- (0,5p) 3. Rezultatul calculului $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$ este egal cu:
A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{4}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $\frac{1}{3}$.
- (0,5p) 4. Dintre numerele întregi -6 ; 2 ; -7 și 0 cel mai mic este:
A. -6 ; B. 2 ; C. 0 ; D. -7 .
- (0,5p) 5. Transformând fracția zecimală $1, (3)$ în fracție ordinară ireductibilă, obținem:
A. $\frac{4}{3}$; B. $\frac{5}{3}$; C. $\frac{7}{9}$; D. $\frac{4}{9}$.
- (0,5p) 6. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 9 bile verzi. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă este egală cu:
A. $\frac{2}{3}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{7}$; D. $\frac{9}{8}$.
- (0,5p) 7. Dacă $a = [(-2)^3 + (-3)^2]$, atunci a^{2017} este egal cu:
A. -3 ; B. 0 ; C. 1 ; D. -1 .
- (0,5p) 8. Măsura unui cerc este egală cu:
A. 180° ; B. 240° ; C. 320° ; D. 360° .
- (0,5p) 9. Lungimea laturii unui triunghi echilateral care are perimetrul egal cu $8,4$ cm este de:
A. $2,5$ cm; B. $2,8$ cm; C. $3,2$ cm; D. $4,5$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

- (0,8p) 1. Știind că $\frac{a}{b} = 1\frac{2}{5}$, $b \neq 0$, rotunjiți la a doua zecimală valoarea raportului

$$\frac{3b - a}{a + b}.$$

- (0,7p) 2. a) Se consideră numerele naturale $m = 108$ și $n = 120$. Calculați $(m; n)$ și $[m; n]$.

- (0,8p) b) Determinați numerele naturale p și g , știind că $p \cdot g = 1000$ și $[p; g] = (p; g)^2$.

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC . Notăm cu M mijlocul laturii AB , iar cu N notăm simetricul punctului M față de dreapta AC .
- (0,7p) a) Arătați că $AN \parallel BC$.
- (0,8p) b) Determinați $\sphericalangle MNC$.
- (0,7p) c) Arătați că $NC \perp BC$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Diferența mulțimilor $A = \{d, e, f, i\}$ și $B = \{d, i, t\}$ este egală cu:
A. $\{f, i\}$; B. $\{d, e\}$; C. $\{d, i\}$; D. $\{e, f\}$.
- (0,5p) 2. Dacă descompunem în puteri de numere prime numărul natural 40 obținem:
A. $2^2 \cdot 3^2$; B. $5^2 \cdot 7$; C. $2^3 \cdot 5^1$; D. $3^2 \cdot 5^1$.
- (0,5p) 3. Dacă rotunjim fracția zecimală $-6,75$ la prima zecimală obținem:
A. $-6,8$; B. $-6,5$; C. $-6,7$; D. $-6,9$.
- (0,5p) 4. Inversul numărului rațional pozitiv $a = 0,(6) \cdot 4,5$ este:
A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{4}{3}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{3}{4}$.
- (0,5p) 5. Dacă $\frac{x}{5} = \frac{1,8}{y}$, atunci produsul $x \cdot y$ este egal cu:
A. 7; B. 9; C. 6; D. 8.
- (0,5p) 6. 20% din numărul natural 35 este egal cu:
A. 5; B. 20; C. 10; D. 7.
- (0,5p) 7. Valoarea absolută a numărului întreg $a = [(-2)^3 - 7^0] : 3$ este egală cu:
A. -4 ; B. 3; C. 6; D. -3 .
- (0,5p) 8. Complementul unghiului cu măsura de 47° este unghiul cu măsura de:
A. 43° ; B. 30° ; C. 63° ; D. 133° .
- (0,5p) 9. Fie ABC un triunghi isoscel de bază BC care are semiperimetrul egal cu 14,5 cm. Dacă $BC = 9$ cm, atunci lungimea laturii AB este egală cu:
A. 8 cm; B. 8,5 cm; C. 10 cm; D. 9 cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

- (0,8p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $4(3 - |x|) \geq 2|x|$.
- (0,7p) 2. Valoarea raportului numerelor raționale pozitive x și y este egală cu 0,75.
a) Aflați câte procente reprezintă numărul x din numărul y .
b) Aflați numerele x și y , știind că suma lor este egală cu 49.
3. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu perimetrul de 24 cm. Notăm cu M mijlocul laturii AB , cu N simetricul punctului M față de punctul A , cu P simetricul punctului M față de dreapta AC și $NP \cap BC = \{E\}$.
- (0,7p) a) Determinați $\sphericalangle BNE$.
- (0,8p) b) Arătați că $AC \parallel NE$.
- (0,7p) c) Calculați \mathcal{P}_{BNE} .

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL III – MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg

1. a) Mulțimea numerelor întregi pozitive; b) Mulțimea numerelor întregi negative; c) Mulțimea numerelor întregi nenule; d) Mulțimea numerelor întregi. 2. a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A; g) F; h) A. 3. a) $A_1 = \{4, 7, 8, 12\}$; b) $A_2 = \{-2, -5, -1, -13, -9\}$. 4. a) F; b) F; c) A; d) A. 5. a) $E \cap \mathbb{Z} = \{-15, -8\}$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+ = \{6, 2, 17\}$; c) $E \cap \mathbb{Z}^* = \{-15, 6, -8, 2, 17\}$; d) $E \setminus \mathbb{Z} = \{0, 6, 2, 17\}$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+ = \{-15, 0, -8\}$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^* = \{0\}$. 6. a) -43; b) 7; c) 25; d) -134; e) 0; f) 91; g) 72; h) -64; i) 8. 7. a) 6; b) -42; c) 58; d) -201; e) -307; f) 18; g) 9; h) -83; i) -92. 8. $B = \{6, 5, -2, 0, -1, -7, 13\}$. 9. $F = \{1, 4, -6, 11, -8, 0, -9\}$. 10. $F = \{-2, -3, -5, -7\}$. 11. $F = \{-4, -6, -8, -9\}$. 12. $\emptyset, \{8\}, \{0\}, \{-3\}, \{8, 0\}, \{8, -3\}, \{0, -3\}, \{8, 0, -3\}$. 13. $Y = \{9, 5, -2, 3, -1, -3\}$, $n = 2^{\text{card } Y} = 64$ submulțimi. 14. a) $A \cup B = \{-7, -1, 0, 1, 4, 7, -4\}$, $\text{card}(A \cup B) = 7$; b) $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$, $\text{card}(A \cap B) = 3$; c) $A \setminus B = \{-7, 4\}$, $\text{card}(A \setminus B) = 2$; d) $B \setminus A = \{7, -4\}$, $\text{card}(B \setminus A) = 2$. 15. a) $A \setminus B = \{0\}$; b) $B \setminus A = \emptyset$. 16. $F = \{1, 3, 5, 7\}$, $D = \{-5, -3, -1\}$; a) $E \cap F = \{1, 3, 5\}$; b) $E \cap D = \{-5, -3, -1\}$; c) $E \setminus F = \{-7, -5, -3, -1, 0\}$; d) $E \setminus D = \{-7, 0, 1, 3, 5\}$. 17. $A_1 = \{0, 3, 5, 9\}$, $A_2 = \{-5, -3, 0\}$; a) $A \cap A_1 = \{0, 3, 5\}$; b) $A \cap A_2 = \{-5, -3, 0\}$; c) $A_1 \setminus A = \{9\}$; $A \setminus A_2 = \{-9, 3, 5\}$. 18. $P = \{-8, -6, -4\}$, $Q = \{2, 4, 6\}$; a) $M \setminus (P \cup Q) = \{-2, 0, 8\}$; b) $M \cap (P \cup Q) = \{-6, -4, 4, 6\}$; c) $(P \cup Q) \setminus M = \{-8, 2\}$. 19. $E_1 = \{-8, -7, -6, 0\}$, $E_2 = \{0, 6, 11\}$; a) $E \setminus (E_1 \cup E_2) = \{-11, 7, 8\}$; b) $E \cap (E_1 \cup E_2) = \{-6, 0, 6\}$; c) $(E_1 \cup E_2) \setminus E = \{-8, -7, 11\}$. 20. Din 2., rezultă că $0, 5 \in E$, deci $0 \notin F$ și $-5 \in F$. Din 1. și 3., rezultă că $-3, -1 \notin F$, deci $-3, -1 \in E$, prin urmare $3, 1 \in F$ și deci $E = \{0, 5, -3, -1\}$ și $F = \{-5, 1, 3\}$ sau $E = \{0, 5, -3, -1, -5\}$ și $F = \{-5, 1, 3, 5\}$. 21. Din 1., rezultă că $-7, -3 \in A$, deci $7, 3 \in B$. Din 2., rezultă că $-3, 0 \in B$, deci $0, 3 \in A$, de asemenea rezultă că $-7 \notin B$, deci $7 \notin A$, prin urmare problema are soluția unică $A = \{-7, -3, 0, 3\}$ și $B = \{-3, 0, 3, 7\}$. 22. Din 3., rezultă că $-2, -1 \in A$, deci $1, 2 \in B$. Din 2., rezultă că $0 \in A \cap B$ și ținând seama de 1., rezultă că $A = \{-2, -1, 0\}$ și $B = \{0, 1, 2\}$ sau $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ și $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ sau $A = \{-2, -1, 0, 2\}$ și $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, prin urmare $A \cap B = \{0\}$ sau $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ sau $A \cap B = \{-2, 0, 2\}$.

Test de evaluare stadială

1. a) $A_1 = \{-13, -2, -10\}$; b) $A_2 = \{8, 11\}$; c) $A_3 = \{-13, -2, 8, 11, -10\}$. 2. a) -87; b) 705; c) -101. 3. a) $A \cup B = \{-5, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{-5, -4\}$, $A \setminus B = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{-3, -2\}$.

Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor

1. a) F; b) A. 2. a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) F. 3. a) 2; b) -1; c) 5; d) -4; e) 3; f) -2. 4. F are coordonata -6; D are coordonata -4; B are coordonata -2; O are coordonata 0; A are coordonata 1; C are coordonata 4; E are coordonata 6. 9. a) -8; b) 3; c) 5; d) -4. 10. a) 0,8 cm; b) 1,2 cm. 11. a) 0,5 cm; b) 1,5 cm. 12. a) $n = 1$ cm; b) $n = 2$ cm; c) $n = 2,5$ cm. 13. $OA = 24$ mm și $OB = 64$ mm. 14. 4 și -4 sau -4 și 4. 15. $OE = 28$ mm; $OF = 35$ mm. 16. $MN = 35$ mm. 17. -4 și 1 sau -3 și 2 sau -2 și 3 sau -1 și 4.

Test de evaluare stadială

1. a) 5; b) -3; c) -1. 3. Coordonatele punctelor E și F sunt -3 și 3 sau 3 și -3.

45

Test de evaluare stadială

1. a) $x = \frac{5}{6}$; b) $x = 3$; c) $x = -\frac{3}{5}$. 2. a) $x = -4$; b) $x = -1\frac{1}{4}$; c) $x = -\frac{3}{4}$. 3. $x = 3\frac{3}{7}$.

Lecția 23. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

1. $\frac{29}{12}$. 2. $\frac{59}{24}$. 3. $\frac{5}{2}$. 4. $\frac{8}{5}$. 5. $\frac{9}{20}$. 6. $\frac{13}{16}$. 7. 30. 8. 11. 9. 14. 10. $\frac{10}{9}$. 11. 3. 12. 17, 18, 19.

13. 20. 14. 72. 15. $26\frac{2}{3}$. 16. 60 pomi. 17. 200 t. 18. 200 lei. 19. 120 caiete. 20. 1000 lei.

21. 200 lei. 22. 22 zile. 23. 600 km. 24. 40 probleme. 25. a VI-a B (27 bănci).

Test de evaluare stadială

1. $-1\frac{2}{15}$. 2. $6\frac{2}{3}$. 3. 112 cărți.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. I. 1. A. 2. B. 3. C. 4. D. 5. A. II. 1. 3. 2. $x = \frac{1}{4}$. 3. 1200 de lei. 4. $x = -\frac{5}{6}$.

Testul 2. I. 1. B. 2. A. 3. D. 4. B. 5. C. II. 1. $\frac{5}{6}$. 2. $x = -12$. 3. 1680 de lei. 4. $x = \frac{5}{6}$.

Testul 3. I. 1. A. 2. C. 3. D. 4. B. 5. C. II. 1. $-\frac{25}{8}$. 2. $x = -2\frac{2}{5}$. 3. 1,75 m. 4. $x = \frac{9}{2}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. F. 3. A. II. 1. -3. 2. $\frac{8}{3}$. 3. $\frac{5}{8}$. III. 1. C. 2. A. 3. B. IV. Dacă notăm cu x suma de bani cheltuită în cele trei zile, obținem $x = 600$ de lei; a doua zi a cheltuit 225 de lei. V. a) $a = 9$; b) $x \in \left\{-2, -2\frac{8}{9}\right\}$.

Model de test pentru Evaluarea Națională

1. B. Ion. 2. D. 4,7. 3. C. $\frac{19}{4}$. 4. 28 elevi. 5. 16 fete. 6. 1 băiat. 7. 15 note de 10. 8. 25%. 9. 9,5.

GEOMETRIE

CAPITOLUL II – TRIUNGHIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare

1. a) Triunghiul DEF ; b), c), d) Analog. 2. a) E, F, G ; b) EF, FG, GE ; c) $\sphericalangle E, \sphericalangle F, \sphericalangle G$. 3. a) A; b) F; c) A. 4. a) A; b) A; c) F. 5. a) $\sphericalangle F$; b) DF ; c) $\sphericalangle E$; d) EF ; e) $\sphericalangle D$; f) DE . 6. C. isoscel. 7. NP . 8. A. scalen. 9. C. echilateral. 10. a) $\sphericalangle A = 60^\circ$; $\sphericalangle B = 60^\circ$; $\sphericalangle C = 60^\circ$; b) A. 11. C. trei unghiuri ascuțite. 12. A. 13. B. dreptunghic. 14. a) $\sphericalangle M$; b) NP ; c) MP, MN . 15. C. un unghi obtuz. 16. D, E, F ; DE, EF, FD ; $\sphericalangle D, \sphericalangle E, \sphericalangle F$. 17. a) $\sphericalangle P, \sphericalangle M, \sphericalangle N$; b) NP, PM, MN . 18. AB , respectiv CA și CB . 19. a) $EF > DE$; b) $EF > DF$. 20. a) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle Q$; b) $NP \equiv QR$; c) $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle R$.

Test de evaluare stadială

1. a) FG, EG, EF ; b) $\sphericalangle G, \sphericalangle E, \sphericalangle F$. 2. a) F; b) A; c) F.

Lecția 2. Elemente de raționament geometric

1. C. 2. C. 3. B. 4. C. 5. A. 6. b). 7. b). 8. Ipoteza este „unghiurile $\sphericalangle O_1$ și $\sphericalangle O_2$ sunt opuse la vârf”, iar concluzia este „ $\sphericalangle O_1 \equiv \sphericalangle O_2$ ”. 9. Ipoteza este „ $a \mid b$ și $a \mid c$ ”, iar concluzia este „ $a \mid b + c$ ”. 10. Ipoteza este: „Două drepte paralele formează cu orice secantă”, iar concluzia este: „unghiuri alterne interne congruente”. 11. Ipoteza este „semidreapta OD este bisectoarea unghiului drept $\sphericalangle EOF$ ”, iar concluzia este „aflați măsura $\sphericalangle EOD$ ”. 12. Ipoteza este: „unghiurile $\sphericalangle O_1$ și $\sphericalangle O_2$ sunt suplementare și $\sphericalangle O_1 = 3 \sphericalangle O_2$ ”, iar concluzia este: „aflați $\sphericalangle O_1$ ”. 13. Ipoteza este „numărul $3^n + 1$ este prim, $n \in \mathbb{N}$ ”, iar concluzia este „arătați că $n = 0$ ”.

Test de evaluare stadială

1. B. definiție. 2. C. teoremă. 3. Ipoteza este: „Dreptele paralele a și b formează cu secanta c unghiurile interne $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ de aceeași parte a secantei. Știind că $\sphericalangle B = 2 \sphericalangle A$ ”, iar concluzia este: „aflați $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ ”.

Lecția 3. Perimetrul triunghiului

2. a) $p = 20$ cm; b) $p = 26,5$ cm; c) $p = 34,5$ cm; d) $p = 42,5$ cm. 3. a) $\mathcal{P} = 52$ dm; b) $\mathcal{P} = 75$ cm; c) $\mathcal{P} = 23,5$ m; d) $\mathcal{P} = 43,4$ dm. 4. a) $\mathcal{P}_{DEF} = 40$ cm; b) $\mathcal{P}_{DEF} = 15,3$ cm. 5. a) $MP = 9$ cm; b) $MP = 9,7$ cm. 6. a) $\mathcal{P}_{DEF} = 21$ cm; b) $\mathcal{P}_{DEF} = 15$ cm; c) $\mathcal{P}_{DEF} = 27$ cm. 7. a) $l = 7$ cm; b) $l = 15$ cm; c) $l = 19$ cm. 9. a) $p = 22,5$ cm; b) $p = 25,5$ cm. 10. a) $EF = 17$ cm; b) $EF = 15$ cm. 11. $MP = 11$ cm. 12. $AB = AC = 15$ cm. 13. $NP = 19,5$ cm, deci $MN = NP = PM$. 14. a) DE ; b) DF . 15. a) $AC = 10$ cm; b) $BC = 11,5$ cm. 16. a) $DE = 25$ cm, $EF = 18$ cm, $DF = 25$ cm; b) $DE = 26$ cm, $EF = 21$ cm, $FD = 21$ cm. 17. a) 12 cm, 16 cm, 24 cm; b) 18 cm, 24 cm, 36 cm. 18. a) 30 cm, 20 cm, 12 cm; b) 45 cm, 30 cm, 18 cm. 19. a) $AB = 10$ cm, $BC = 20$ cm, $CA = 14$ cm; b) $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 18$ cm. 20. $MN = 25$ cm, $NP = 15$ cm și $PM = 20$ cm; b) $MN = 21$ cm, $NP = 28$ cm și $PM = 14$ cm. 21. Considerăm triunghiul isoscel ABC de bază BC și avem de analizat două cazuri: $AB = \frac{BC + AC}{2}$ și $BC = \frac{AB + AC}{2}$. Din fiecare caz rezultă că $AB \equiv BC \equiv CA$.

22. Nu. Notăm cu a , b și c lungimile laturilor triunghiului și presupunem că $a < b < c$. $\mathcal{P} = 2p \in \mathbb{N}$, deci $a = 2$, iar b și c sunt numere impare, așadar $c \geq b + 2$ sau $c \geq b + a$, deci a , b și c nu verifică inegalitatea triunghiului.

Test de evaluare stadială

1. $\mathcal{P}_{MNP} = 25,2$ cm. 2. $AB = 17$ cm, $BC = 17$ cm, $AC = 14$ cm, deci baza triunghiului isoscel ABC este latura AC . 3. $DE = 26$ cm, $EF = 28$ cm, $FD = 30$ cm.

Lecția 4. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

1. $\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180^\circ$. 2. a) F; b) A. 3. a) $\sphericalangle C = 74^\circ$; b) $\sphericalangle A = 58^\circ$. 4. a) $\sphericalangle C = 105^\circ$; b) $\sphericalangle B = 96^\circ$. 5. a) $\sphericalangle P = 47^\circ 25'$; b) $\sphericalangle N = 71^\circ 16'$. 6. a) $\sphericalangle D = 88^\circ 8'$; b) $\sphericalangle F = 34^\circ 24'$. 7. $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. 8. Considerăm $\triangle ABC$. Dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 90^\circ$, atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > 180^\circ$. 9. Considerăm $\triangle ABC$. Dacă $\sphericalangle A > 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 90^\circ$, atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > 180^\circ$. 10. a) $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $\sphericalangle C = 90^\circ$; b) $\sphericalangle A = 72^\circ$, $\sphericalangle B = 18^\circ$ și $\sphericalangle C = 90^\circ$. 11. a) $\sphericalangle D = 54^\circ$, $\sphericalangle E = 18^\circ$ și $\sphericalangle F = 108^\circ$; b) $\sphericalangle D = 12^\circ$, $\sphericalangle E = 144^\circ$ și $\sphericalangle F = 24^\circ$. 12. a) $\sphericalangle A = 36^\circ$, $\sphericalangle B = 19^\circ$ și $\sphericalangle C = 125^\circ$; b) $\sphericalangle A = 59^\circ$, $\sphericalangle B = 28^\circ$ și $\sphericalangle C = 93^\circ$. 13. a) $\sphericalangle M = 72^\circ$, $\sphericalangle N = 72^\circ$, $\sphericalangle P = 36^\circ$; b) $\sphericalangle M = 45^\circ$, $\sphericalangle N = 67^\circ 30'$, $\sphericalangle P = 67^\circ 30'$. 14. a) $\sphericalangle D = 20^\circ$, $\sphericalangle E = 80^\circ$, $\sphericalangle F = 80^\circ$; b) $\sphericalangle D = 75^\circ$, $\sphericalangle E = 75^\circ$, $\sphericalangle F = 30^\circ$. 15. a) $\sphericalangle DGE = 102^\circ 30'$; b) $\sphericalangle FGE = 77^\circ 30'$. 16. a) $\sphericalangle D = 54^\circ$, $\sphericalangle E = 108^\circ$, $\sphericalangle F = 18^\circ$; b) $\sphericalangle D = 72^\circ$, $\sphericalangle E = 12^\circ$, $\sphericalangle F = 96^\circ$. 17. Construim diagonala AC , deci $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = \sphericalangle CAB + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD + \sphericalangle D + \sphericalangle DAC = 360^\circ$. 18. a) $\sphericalangle D = 40^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$ și $\sphericalangle F = 80^\circ$; b) $\sphericalangle D = 36^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$ și $\sphericalangle F = 84^\circ$. 19. a) $\sphericalangle D = 90^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$ și $\sphericalangle F = 30^\circ$; b) $\sphericalangle D = 80^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$ și $\sphericalangle F = 40^\circ$. 20. a) $\sphericalangle EIF = 126^\circ$; b) $\sphericalangle EDF = 56^\circ$. 21. Considerăm punctele $E \in a$ și $F \in b$ situate de aceeași parte a dreptei AB

Testul 3. I. 1. B. 2. A. 3. C. 4. D. 5. B. II. 1. Măsura unghiului care se opune bazei este număr par; $2^\circ, 89^\circ, 89^\circ$. **2.** $2\angle D = \angle E + \angle F$, deci $3\angle D = 180^\circ$, prin urmare $\angle D = 60^\circ$ și $\triangle DEF$ este echilateral, prin urmare $\mathcal{P}_{DEF} = 21$ cm. **3.** $MN = 3$ cm, $BM = 6$ cm, $PN = 9$ cm, deci $\triangle ABC \equiv \triangle NBP$, așadar $BC \equiv BP$ și cum $\angle B = 60^\circ$, rezultă că $\triangle BCP$ este echilateral. **4.** $\angle M = 90^\circ$; $\angle NMD \equiv \angle P$, dar $\angle P \equiv \angle PMF$, deci $\angle NMD \equiv \angle PMF$ și cum $\angle NME \equiv \angle PME$, rezultă că $\angle DME \equiv \angle FME$. Construim $EG \perp MF$, $G \in MF$, deci $ED \equiv EG$ și cum $\angle GFE = 30^\circ$, rezultă că $EF = 2EG$, așadar $EF = 2ED$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. F. 3. A. II. 1. 2,5 cm. **2.** NP . **3.** 150° . **III. 1. D. 2. D. 3. C. IV.** $O_1A \equiv O_1B$ și $MA \equiv MB$, deci MO_1 este mediatoarea laturii AB , așadar $O_1M \parallel AC$, prin urmare $\angle O_1MB \equiv \angle C$ și analog se arată că $\angle O_2MC \equiv \angle B$, deci $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$ și cum $\triangle O_1MO_2 \equiv \triangle O_1AO_2$ rezultă că $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. **V. a)** Dacă latura triunghiului are lungimea l , observăm că $BD = CE = \frac{l}{4}$, deci $AD \equiv AE$ și deoarece $\angle A = 60^\circ$, rezultă că $\triangle ADE$ este echilateral, prin urmare $DE \parallel BC$. **b)** $1 - \frac{l}{4} = 9$, de unde rezultă că $l = 12$ cm, prin urmare $\mathcal{P}_{ABC} = 36$ cm.

Model de test pentru Evaluarea Națională

1. D. 65° . **2.** B. 14 km. **3.** C. 50° . **4.** $\angle A = \angle E = 60^\circ$ și deoarece sunt alterne interne rezultă că $AB \parallel DE$. **5.** $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$ (L.U.L.), de unde rezultă că $AD \equiv BE$. **6.** $\mathcal{P}_{ABC} + \mathcal{P}_{CDE} = 3(BC + CD) = 174$ m. **7.** $\angle EBC = 60^\circ$, deci $\angle ECB = 30^\circ$, prin urmare $BC = 1,2$ km, așadar $\mathcal{P}_{ABD} = 3,6$ km. **8.** Deoarece $BC \equiv DB$ și $\angle DBC = 120^\circ$, rezultă că $\angle BCD = 30^\circ$, deci $\angle ECA \equiv \angle DCA$. **9.** În $\triangle CDE$, avem $\angle CDE = 30^\circ$, deci $CD = 2,1$ km; $\mathcal{P}_{CDE} = 4,95$ km.

Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Testul 1

Subiectul I. 1. C. 2. B. 3. D. 4. A. 5. D. 6. C. Subiectul al II-lea. 1. -4. **2.** $x = -\frac{1}{3}$. **3.** $a = -\frac{5}{12}$ și rotunjind obținem -0,417. **4.** $\angle M = 36^\circ$, $\angle N = \angle P = 72^\circ$. **5.** $PD = PE = PF$, deci $\angle EDF = 90^\circ$. **6.** Nu; $AE, AF \in \mathbb{N}$, dacă $BE, CF \in \mathbb{N}$ și cum $BE = \frac{DB}{2}$ și $CF = \frac{DC}{2}$, rezultă că $BD = 4$ cm și $CD = 2$ cm (am presupus că $BD > CD$), prin urmare $AE = 4$ cm și $AF = 5$ cm. Cum $\angle A = 60^\circ$ și $AE < AF$, rezultă că $\angle F < \angle A < \angle E$, deci $4 \text{ cm} < EF < 5 \text{ cm}$, așadar $EF \notin \mathbb{N}$.

Testul 2

Subiectul I. 1. A. 2. D. 3. D. 4. B. 5. C. 6. A. Subiectul al II-lea. 1. 49. **2.** $x \in \{-1, 0, 1\}$. **3.** $a = -\frac{31}{18}$, deci $a^{-1} = -\frac{18}{31}$. **4.** $\mathcal{P}_{\min} = 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$. **5.** $OD = 2DM$, deci $DM = \frac{OD}{2}$, prin urmare $\angle MOD = 30^\circ$ și deci $\angle EOF = 60^\circ$. **6.** $\triangle ADM \equiv \triangle CDN$, deci $DM \equiv DN$, $\angle DMN = 45^\circ$, prin urmare $\angle BMP = \angle MPD = 76^\circ$ (alterne interne).

Testul 3

Subiectul I. 1. B. 2. C. 3. A. 4. D. 5. C. 6. B. Subiectul al II-lea. 1. 10. **2.** $x = -1\frac{5}{6}$. **3.** $x = -\frac{5}{4}$.

$|x| = \frac{5}{4}$. 4. Deoarece $MP = MQ$, rezultă că ΔMPQ este echilateral, deci $\sphericalangle PMQ = 60^\circ$. 5. $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle END$ și $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle DMG$, deci $\sphericalangle DMG \equiv \sphericalangle END$, prin urmare $\Delta DMG \equiv \Delta END$, de unde rezultă că $DM \equiv EN$. 6. Construim mediana DM , $M \in EF$, deci $DM = 2DG$ și cum $\sphericalangle G = 90^\circ$, rezultă că $\sphericalangle DMG = 30^\circ$, prin urmare $\sphericalangle E = 15^\circ$, așadar $\sphericalangle F = 75^\circ$.

Teste de evaluare finală

Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	A	A	D	A	B	C	D	B

Partea a II-a:

1. $\frac{3b-a}{a+b} = \frac{2}{3}$; 0,67. 2. a) $(m; n) = 12$; $[m; n] = 1080$; b) $p = 10$ și $q = 100$ sau $p = 20$ și $q = 50$ sau $p = 50$ și $q = 20$ sau $p = 100$ și $q = 10$. 3. a) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAN = 180^\circ$, deci $AN \parallel BC$; b) $CM \equiv CN$ și $\sphericalangle MCN = 60^\circ$, deci $\sphericalangle MNC = 60^\circ$; c) $\sphericalangle NCB = \sphericalangle NCM + \sphericalangle MCB = 90^\circ$.

Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	C	A	C	B	D	B	A	C

Partea a II-a:

1. $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 2. a) $x = 75\% \cdot y$; b) $x = 21$, $y = 28$. 3. a) $PA \equiv AM \equiv AN$, deci $\sphericalangle MPN = 90^\circ$, așadar $\sphericalangle BNE = 60^\circ$; b) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BNE$, deci $AC \parallel NE$; c) $\mathcal{P}_{BNE} = 3NB = 36$ cm.

Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	B	A	C	C	B	D	A	C

Partea a II-a:

1. $x = \frac{4}{9}$ și $y = -\frac{7}{12}$; $x + y = 0,13(8)$. 2. a) $100 = a^2 \cdot b^2 \cdot c$, deci sunt posibile cazurile: $a = 1$, $b = 5$, $c = 4$; $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$; $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$; $a = 5$, $b = 1$, $c = 4$, prin urmare $A = \{154, 251, 521, 514\}$; b) Dacă notăm cu n numărul de submulțimi, atunci $n = 2^{\text{card } A} = 2^4 = 16$. 3. a) $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 30^\circ$; b) $BD = 2DE = 15,5$ cm și $CD = 2DF = 25,5$ cm, deci $BC = 41$ cm; c) Construim $AM \perp BC$, $M \in BC$ și avem $AM = 12$ cm și cum $DM = 5$ cm din ΔADM , aplicând teorema lui Pitagora, obținem $AD = 13$ cm; $\mathcal{P}_{ACD} = 62,5$ cm.

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg	5
Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor	8
Lecția 3. Valoarea absolută a unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	11
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	15
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	16
Lecția 4. Adunarea numerelor întregi. Proprietățile adunării	18
Lecția 5. Scăderea numerelor întregi	21
Lecția 6. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietățile înmulțirii	24
Lecția 7. Împărțirea numerelor întregi	27
Lecția 8. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg.....	30
Lecția 9. Reguli de calcul cu puteri	33
Lecția 10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor cu numere întregi.....	35
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	39
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	40
Lecția 11. Ecuații în \mathbb{Z}	42
Lecția 12. Inecuații în \mathbb{Z}	45
Lecția 13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor	48
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	51
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	53
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	55

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Lecția 14. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional.....	57
Lecția 15. Compararea numerelor raționale.....	62
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	67
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	69
Lecția 16. Adunarea numerelor raționale. Proprietățile adunării	71
Lecția 17. Scăderea numerelor raționale.....	76
Lecția 18. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietățile înmulțirii	80
Lecția 19. Puterea cu exponent natural a unui număr rațional.....	85
Lecția 20. Împărțirea numerelor raționale	90
Lecția 21. Ordinea efectuării operațiilor.....	95
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	99
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	102
Lecția 22. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$), unde a , b și c sunt numere raționale	104
Lecția 23. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	108
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	112
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	115
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională</i>	117

GEOMETRIE

CAPITOLUL II. TRIUNGIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare	119
Lecția 2. Elemente de raționament geometric.....	123
Lecția 3. Perimetrul triunghiului.....	125
Lecția 4. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	128
Lecția 5. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior.....	131
Lecția 6. Construcția triunghiurilor: cazurile L.U.L., U.L.U. și L.L.L.....	134
Lecția 7. Inegalități între elementele triunghiului.....	136
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>138</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>140</i>
Lecția 8. Concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi	142
Lecția 9. Concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi	144
Lecția 10. Înălțimile unui triunghi. Concurența înălțimilor unui triunghi	147
Lecția 11. Medianele unui triunghi. Concurența medianelor unui triunghi.....	150
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>152</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>155</i>
Lecția 12. Congruența triunghiurilor oarecare.....	156
Lecția 13. Criteriile de congruență a triunghiurilor	158
Lecția 14. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice.....	162
Lecția 15. Metoda triunghiurilor congruente	166
Lecția 16. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi.....	170
Lecția 17. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.....	173
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>176</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>178</i>
Lecția 18. Proprietăți ale triunghiului isoscel	180
Lecția 19. Proprietăți ale triunghiului echilateral	184
Lecția 20. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	188
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	<i>194</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	<i>196</i>
<i>Model de test pentru Evaluarea Națională.....</i>	<i>198</i>
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIINȚELOR.....	200
TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....	203
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	207