

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru :

clasa 7 / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025

2 vol.

ISBN 978-973-47-4300-1

Partea 2. – Ed. rev. – 2025. – ISBN 978-973-47-4375-9

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul II

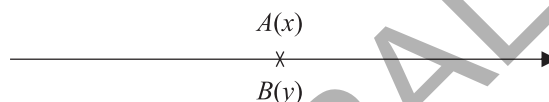
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități



Citesc și rețin

Numerele reale x și y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x , respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci și $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În \mathbb{R} , o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității același termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z; \quad x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z; \quad x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ și $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ și $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiție: O egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numește **identitate**.



Cum se aplică?

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

2. Se consideră numerele reale a, b, c și d , care îndeplinesc condițiile $4a = 3b$ și $25c = 10d$. Arătați că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluție:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$.
Din $12a = 9b$ și $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $x + 3 = y + 3$; b) $x - 8 = y - 8$;
c) $x - 1, (3) = y - 1, (3)$; d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$.

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$;
c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; d) $x : (-23) = y : (-23)$.

3. Dacă x și y sunt două numere reale care îndeplinesc condiția $24x = 36y$, arătați că:

- a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)	$24x = 36y$																		

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Dacă x și y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătați că:

- a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

5. Se consideră numerele reale z și t , care îndeplinesc condiția $2z = 5t$. Arătați că:

- a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătați că:

- a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c și d sunt numere reale care îndeplinesc condițiile $10a = 15b$ și $35c = 28d$, arătați că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ și $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătați că $|a| = |b|$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

9. Verificați identitățile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificați identitățile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

11. Numerele reale x , y și z îndeplinesc condițiile $x + 2y = \sqrt{7}$, $y + 2z = 3\sqrt{7}$ și $z + 2x = 5\sqrt{7}$. Calculați suma $x + y + z$.

12. Dacă a , b și c sunt trei numere reale pozitive cu proprietățile $ab = 2\sqrt{6}$, $bc = 3\sqrt{3}$ și $ca = 6\sqrt{2}$, calculați produsul abc .

13. Arătați că pentru orice numere reale x și y , au loc identitățile:

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; b) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condițiile $a + b + c = 1$ și $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

15. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $x \cdot y \cdot z = 1$ și $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0$. Arătați că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătați că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) 2. Se consideră numerele reale z și t , care îndeplinesc condiția $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătați că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) 3. Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $4a = 5b$ și $14c = 10d$. Arătați că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) 1. Soluția ecuației $4x + 23 = 27$, $x \in \mathbb{R}$, este:
A. $x = -1$; B. $x = 1$; C. $x = 3$; D. $x = -2$.
- (1p) 2. Soluția ecuației $\sqrt{3}x - 1 = 0,5$, $x \in \mathbb{R}$, este:
A. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$; B. $x = -\sqrt{2}$; C. $x = -\sqrt{3}$; D. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (1p) 3. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} x = y + 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$, este:
A. $\{(-1; 2)\}$; B. $\{(2; 3)\}$; C. $\{(1; 4)\}$; D. $\{(1; -2)\}$.
- (1p) 4. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} \sqrt{7}x + y = 10 \\ 3x - \sqrt{7}y = 0 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$, este:
A. $\{(\sqrt{7}; 3)\}$; B. $\{(-\sqrt{7}; 1)\}$; C. $\{(1; -\sqrt{7})\}$; D. $\{(2; \sqrt{7})\}$.
- (1p) 5. Diferența dintre dublul unui număr și $\frac{1}{5}$ din acesta este egală cu 27. Numărul respectiv este egal cu:
A. -24; B. 18; C. 15; D. -36.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

- (1p) 1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{6} - 2\right) = \frac{x}{2}$.
- (1p) 2. Radu a citit primele 91 de pagini ale unui roman de aventuri și a constatat că numărul acestora reprezintă 52% din numărul paginilor ce urmau să fie citite. Calculați numărul de pagini ale romanului.
- (1p) 3. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 0,25x - 1, (6)y = 5,5 \\ \frac{x+6}{4} + \frac{7-y}{5} = 4 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- (1p) 4. În sala unui restaurant sunt 37 de mese, unele cu câte două scaune și altele cu câte patru scaune. Știind că la cele 37 de mese sunt așezate 130 de scaune, aflați numărul meselor cu câte două scaune și numărul meselor cu câte patru scaune.

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VII-a

Capitolul: Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) 1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, atunci $\sqrt{5}x = y\sqrt{5}$. A F

(7p) 2. Soluția ecuației $\frac{1}{7} + x = \frac{8}{7}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$. A F

(7p) 3. Mulțimea $S = \{(3; -2)\}$ este soluția sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) 1. Știind că, după o ieftinire cu 5%, o rachetă de tenis de câmp costă 152 de lei, înseamnă că prețul rachetei înainte de ieftinire era delei.

(7p) 2. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ este perechea de numere reale $(x; y) = \dots\dots\dots$.

(7p) 3. Dacă x, y și z sunt trei numere reale cu proprietățile $x + y = 3\sqrt{11}$, $y + z = -4\sqrt{11}$ și $z + x = 5\sqrt{11}$, atunci suma $x + y + z$ este egală cu

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) 1. Un sfert dintr-un număr este cu 3,5 mai mic decât trei cincimi din numărul respectiv. Numărul este egal cu:

A. 15; B. 28; C. 10; D. 12.

(8p) 2. Rotunjind la prima zecimală soluția ecuației $3 - \sqrt{6}x = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}x$, unde $x \in \mathbb{R}$, obținem numărul:

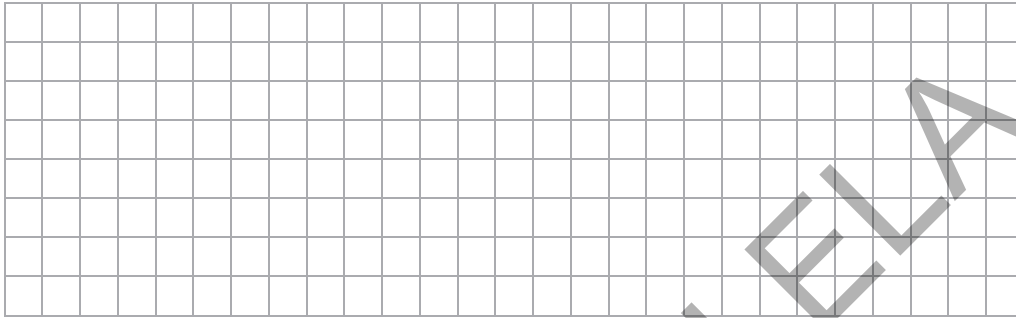
A. 1,7; B. 1,4; C. 2,5; D. 3,2.

(8p) 3. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Știind că numărul fetelor este cu 5 mai mic decât dublul numărului băieților, atunci numărul băieților este egal cu:

A. 10; B. 15; C. 12; D. 11.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

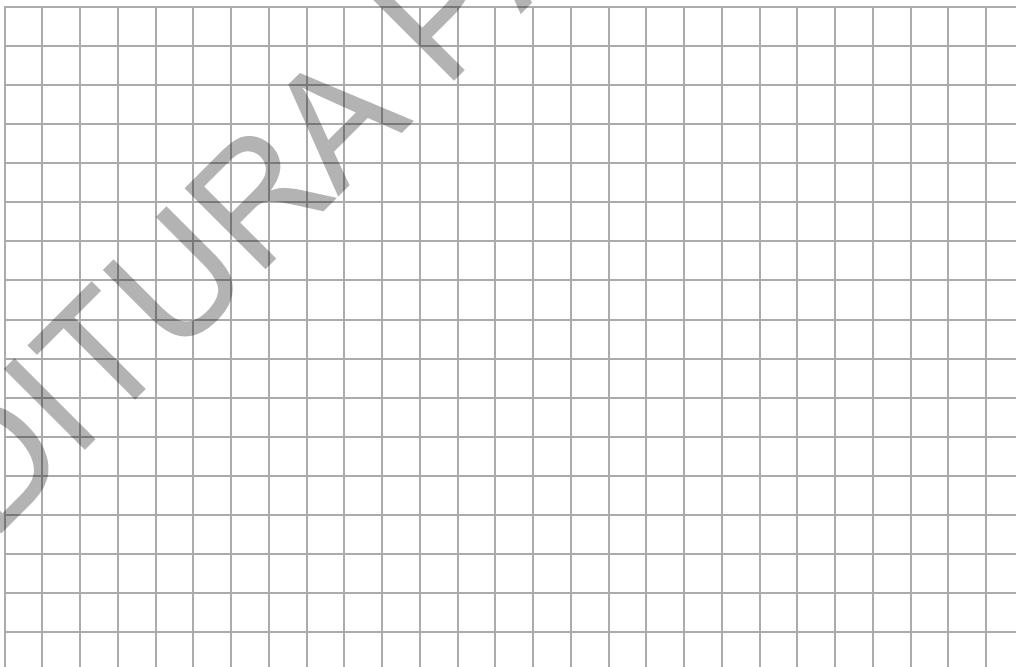
- IV.** Radu a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. În prima zi a cheltuit $\frac{3}{8}$ din sumă, în ziua următoare a cheltuit $\frac{8}{9}$ din suma cheltuită în ziua precedentă, iar în ultima zi a cheltuit restul de 175 de lei. Calculați suma de bani cheltuită de Radu a doua zi.



V. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} - 2 = 0 \\ \frac{x + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}.$$

- (8p) a) Rezolvați sistemul de ecuații.
(8p) b) Comparați numerele reale x și y .



Probleme din realitatea cotidiană

1. Radu a depus la bancă suma de 2500 de lei pe o perioadă de un an, cu dobândă anuală fixă. Știind că după un an Radu are în cont suma de 2600 de lei, calculați rata dobânzii anuale acordate de bancă.
2. Determinați numărul elevilor din clasa a VII-a B, știind că cei 4 elevi ai clasei care au participat la olimpiadele școlare reprezintă $\frac{2}{9}$ din numărul elevilor din clasă care nu au participat la olimpiade.
3. Cele 48 de cărți împrumutate elevilor de o bibliotecă școlară reprezintă 12% din numărul cărților rămase în bibliotecă. Aflați câte cărți deține biblioteca.
4. Pentru pregătirea unui test la matematică, Andrei are de lucrat o temă suplimentară. Într-o zi a lucrat $\frac{16}{21}$ din temă, în ziua următoare a lucrat mai puțin cu $\frac{7}{8}$ din cât lucrase și astfel mai are de rezolvat 6 probleme. Câte probleme are tema lui Andrei?
5. Mihai a parcurs cu autocarul un traseu turistic în 3 zile. Știind că în prima zi a parcurs un sfert din lungimea traseului, în ziua următoare a parcurs 80% din cât parcursese în ziua precedentă, iar în ultima zi a parcurs 176 km, calculați lungimea traseului.
6. Un festival folcloric s-a desfășurat în două zile din luna octombrie. Aflați perioada de desfășurare a festivalului, știind că data la care a început festivalul reprezintă 95% din data la care festivalul s-a încheiat.
7. Ioana și fiica ei, Irina, au închiriat pentru o săptămână o cameră cu două paturi la o pensiune montană, cu suma de 510 lei, în condițiile în care pensiunea acorda la cazare o reducere de 40% pentru adulți și de 75% pentru copii. Calculați prețul chiriei fără reduceri.
8. Maria a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. Știind că în prima zi a cheltuit o treime din sumă, în ziua următoare a cheltuit un sfert din suma rămasă, iar în ultima zi a cheltuit 150 de lei, calculați suma de bani cheltuită de Maria a doua zi.
9. Un fermier a cumpărat un număr de puiți de nuc și a observat că, dacă ar fi plantați câte 10 pe un rând, ar mai avea nevoie de 8 puiți pentru ca toate rândurile să fie complete, iar dacă ar fi plantați câte 9 pe un rând, toate rândurile ar fi complete. Câți puiți a cumpărat fermierul?
10. O societate comercială a exportat în 3 luni o cantitate de grâu. Știind că în prima lună a exportat 32% din cantitate, în luna următoare a exportat mai mult cu 20%, iar în ultima lună a exportat cantitatea de 111 t, calculați cantitatea de grâu exportată în prima lună.

Capitolul III

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide



Citesc și rețin

Definiție: Produsul cartezian a două mulțimi nevide A și B , notat $A \times B$, este mulțimea formată cu perechile ordonate (a, b) , unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Observații:

1. $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
2. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$.

Teoremă: Dacă $\text{card } A = m$ și $\text{card } B = n$, atunci $\text{card } A \times B = m \cdot n$.



Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimile $A = \{d, f\}$ și $B = \{p, b\}$. Determinați mulțimea $A \times B$.

Soluție:

$$A \times B = \{(d, p), (d, b), (f, p), (f, b)\}.$$

2. Determinați mulțimile $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ și $D \setminus C$, știind că $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

Soluție:

Din $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ rezultă că $D = \{0, 3\}$ și $C = \{0, 1, 3, 5\}$, prin urmare $C \cup D = \{0, 1, 3, 5\}$, $C \cap D = \{0, 3\}$, $C \setminus D = \{1, 5\}$ și $D \setminus C = \emptyset$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\}$ și $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\}$.

- a) Enumerați elementele mulțimilor E și F .
- b) Determinați mulțimile $E \times F$ și $F \times E$.

Soluție:

a) $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} = \{1, 2\}$, $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$;

b) $E \times F = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$;

$F \times E = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele notații:

- a) $A \times B$; b) $C \times D$; c) $E \times F$; d) $M \times N$.

2. Se consideră mulțimile $A = \{3\}$ și $B = \{4, 5\}$. Determinați mulțimea $A \times B$.

$A \times B =$																			

3. Se consideră mulțimile $C = \{a, b\}$ și $D = \{d, f\}$. Determinați mulțimea $C \times D$.

$C \times D =$																			

4. Se consideră mulțimile $A = \{6, 7\}$ și $B = \{4, 8, 9\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $(6, 9) \in A \times B$; b) $(4, 7) \in A \times B$; c) $(7, 2) \in A \times B$;
d) $(7, 4) \in B \times A$; e) $(8, 6) \in B \times A$; f) $(9, 5) \in B \times A$.

5. Determinați card $C \times D$ în următoarele cazuri:

- a) card $C = 7$ și card $D = 8$; b) card $C = 6$ și card $D = 9$.

a) card $C \times D =$																			

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Enumerați elementele mulțimilor $A \times B$ și $B \times A$ în fiecare dintre cazurile:

- a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{5\}$; b) $A = \{t\}$, $B = \{a, b\}$;
c) $A = \{2, 7\}$, $B = \{3, 8\}$; d) $A = \{f, g\}$, $B = \{o, v\}$;
e) $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 9\}$; f) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{c, d, h\}$.

7. Știind că \mathcal{D}_n reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului întreg n , determinați mulțimile:

- a) $\mathcal{D}_4 \times \mathcal{D}_5$; b) $\mathcal{D}_3 \times \mathcal{D}_8$.

8. Determinați mulțimile A și B , știind că:

- a) $A \times B = \{(5, 4), (5, 6), (7, 4), (7, 6), (9, 4), (9, 6)\}$;
b) $B \times A = \{(d, f), (d, g), (f, f), (f, g), (h, f), (h, g), (p, f), (p, g)\}$;
c) $B \times A = \{(2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (8, 2), (8, 5)\}$.

9. Dacă notăm cu A mulțimea numerelor prime de o cifră și cu B mulțimea numerelor compuse de o cifră, determinați mulțimea $B \times A$.

10. Determinați mulțimile $A \times B$ și $B \times A$, știind că:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{2x} : 3\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \overline{x2} : 4\}.$$

11. Se consideră mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{n} \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$ și $B = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{3}{m} \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$.

Efectuați $A \times B$.

12. Determinați mulțimile $E \times F$ și $F \times E$ în următoarele cazuri:

a) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$ și $F = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid |y| \leq 1\}$;

b) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ și $F = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y \leq 2\}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Enumerați elementele mulțimilor $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ și $F \setminus E$ în următoarele cazuri:

a) $E \times F = \{(x, x), (x, t), (y, x), (y, t), (z, x), (z, t)\}$;

b) $F \times E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$.

14. Se consideră mulțimile A , B și C .

a) Știind că $A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$ și $B \times C = \{(1, 3), (1, 5), (3, 3), (3, 5)\}$, determinați $C \times A$.

b) Știind că $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ și $C \times A = \{(1, 1), (1, 2), (5, 1), (5, 2)\}$, determinați $B \times C$.

15. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^{n+2} < 8^2\}$ și $F = \{m \in \mathbb{N}^* \mid 3^{m+3} < 9^3\}$. Efectuați produsul cartezian al mulțimilor F și E .

16. Se consideră mulțimile $E = \{y \mid xy \text{ este număr prim}\}$ și $F = \{c \mid \overline{abc} \text{ este pătrat perfect}\}$. Determinați card $E \times F$.

17. Se consideră mulțimile $C = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \mid \frac{2}{x+1} \in \mathbb{Z}, x \neq -1\right\}$ și $D = \left\{y \in \mathbb{Z}^* \mid \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}, x \neq 1\right\}$.

Efectuați $D \times C$.

18. Enumerați elementele mulțimii $A \times B$, știind că mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{b, c, d\}$;

ii) $A \cap B = \{b, d\}$;

iii) $A \setminus B = \emptyset$.

19. Determinați mulțimea $E \times F$, pentru mulțimile E și F care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $E \cap F = \{4, 5\}$;

ii) $E \setminus F = \emptyset$;

iii) $F \setminus E = \{7, 8\}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

20. Se consideră mulțimile $A = \{\overline{ab} \mid m_a(a; b) = 3, a \geq b > 0\}$ și $B = \{\overline{cd} \mid m_g(c; d) = 4, 0 < c \leq d\}$. Efectuați $A \times B$.

21. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = 2ab, a \neq 0\}$ și $F = \{\overline{cd} \mid \overline{cd} = 4(c+d), c \neq 0\}$. Determinați mulțimea $E \times F$.

22. Se consideră mulțimile A și B . Dacă card $A \cap B = 5$, card $A \setminus B = 2$ și card $B \setminus A = 3$, determinați card $A \times B$.

23. Se consideră mulțimile E și F . Dacă $\text{card } E \cup F = 9$, $\text{card } E \setminus F = 1$ și $\text{card } F \setminus E = 4$, determinați $\text{card } F \times E$.

24. Se consideră mulțimile $E = \{n - 3, n^2 + 1, 2n + 10\}$ și $F = \{n^2 - 5, 3 - n^2, 3n + 19\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Știind că $E \times F = F \times E$, determinați numărul întreg n .

25. Determinați $\text{card } E \times F$, unde $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |1 - 2x| \leq 3\}$ și $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x + 7}{2x + 3} \in \mathbb{N}\right\}$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Se consideră mulțimile $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ și $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| \leq 7\}$. Determinați mulțimea $D = \{(x, y) \in E \times F \mid \sqrt{|x + y|} \in \mathbb{Z}\}$.

27. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq |x| \leq 13\}$. Determinați cardinalul mulțimii $B = \{(y, z) \in A \times A \mid \sqrt{y^2 + z^2} \in A\}$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră mulțimile $E = \{2, 4\}$ și $F = \{4, 5, 6\}$. Determinați mulțimile:
 a) $E \times F$; b) $F \times E$.
- (3p) **2.** Știind că $A \times B = \{(x, y), (x, t), (y, y), (y, t), (z, y), (z, t), (t, y), (t, t)\}$, determinați mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
- (3p) **3.** Se consideră mulțimile E și F . Dacă $\text{card } E \times F = 121$ și $\text{card } E \cap F = 7$, determinați $\text{card } E \cup F$.

Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

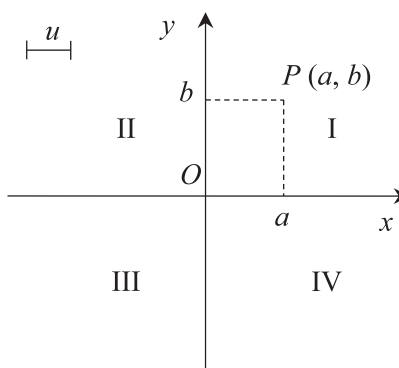


Citesc și rețin

Definiție: Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor, care sunt perpendiculare și care au drept origine punctul lor de intersecție.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul O . Dreapta Ox se numește **axa absciselor**, dreapta Oy se numește **axa ordonatelor**, iar segmentul de lungime u a fost ales drept unitate de măsură.

Sistemul de axe ortogonale xOy împarte planul în patru părți numite **cadrane**, notate cu cifrele romane I, II, III și IV ca în figură.



GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante



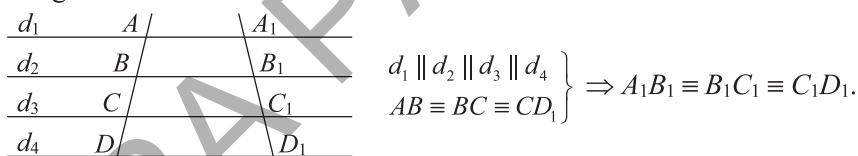
Citesc și rețin

Definiție: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleași unități de măsură.

Definiție: Segmentele $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ și $E_1F_1, E_2F_2, \dots, E_nF_n$ se numesc **proporționale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleași unități de măsură, formează șirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1} = \frac{A_2B_2}{E_2F_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.



Cum se aplică?

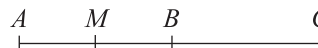
1. Determinați raportul segmentelor AB și EF cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluție:

Exprimăm lungimea segmentului EF în centimetri: $EF = 140 \text{ mm} = 140 : 10 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$, deci $\frac{AB}{EF} = \frac{4 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = \frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B și C , în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC$ și notăm cu M mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele AM, MB, AB și BC sunt proporționale.

Soluție:



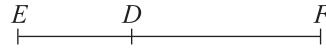
Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x, AM = x$ și $MB = x$;

$$\frac{AM}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{MB}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ prin urmare } \frac{AM}{AB} = \frac{MB}{BC}.$$

3. Se consideră segmentul EF și punctul D interior acestuia, astfel încât $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$.

Aflați rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ și $\frac{EF}{DF}$.

Soluție:



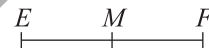
Deoarece $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DE}{EF} = \frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietățile proporțiilor derivate cu alți termeni: $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF} = \frac{3}{3+5}$, așadar $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF} = \frac{3+5}{5}$, așadar $\frac{EF}{DF} = \frac{8}{5}$.



Știu să rezolv

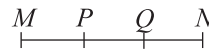
Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul EF și punctul M , mijlocul acestuia. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



- a) $\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{EM}{MF} = 1$; c) $\frac{EF}{EM} = 2$; d) $\frac{FM}{FE} = \frac{1}{3}$.

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul MN și punctele P și Q interioare acestuia, astfel încât $MP \equiv PQ \equiv QN$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.



- a) $\frac{MP}{MN} = \dots$; b) $\frac{MQ}{MN} = \dots$; c) $\frac{MQ}{PN} = \dots$; d) $\frac{NQ}{NP} = \dots$.

3. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D și E , în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.



- a) $\frac{AB}{BE} = \dots$; b) $\frac{AC}{BE} = \dots$; c) $\frac{EA}{EB} = \dots$; d) $\frac{DE}{DA} = \dots$.

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Determinați raportul segmentelor AB și CD în următoarele cazuri:

- a) $AB = 12$ cm și $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm și $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm și $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm și $CD = 72$ cm.

5. Determinați raportul segmentelor AB și CD în următoarele cazuri:

- a) $AB = 15$ m și $CD = 2,4$ dam; b) $AB = 28$ m și $CD = 0,08$ hm;
c) $AB = 6$ dam și $CD = 450$ dm; d) $AB = 72$ dm și $CD = 450$ cm.

6. Arătați că segmentele AB, CD, EF și MN sunt proporționale, știind că:

- a) $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 28$ cm și $MN = 21$ cm;
b) $AB = 8$ cm, $CD = 25$ cm, $EF = 20$ cm și $MN = 10$ cm.

7. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB și cu P mijlocul segmentului AM , aflați rapoartele:

- a) $\frac{AM}{AB}$; b) $\frac{AP}{AB}$; c) $\frac{PB}{AM}$; d) $\frac{AB}{PB}$.

8. Punctul C este mijlocul segmentului AB , iar punctul D este interior segmentului BC astfel încât $BC = 3BD$. Aflați:

- a) $\frac{BD}{BC}$; b) $\frac{DC}{DA}$; c) $\frac{CD}{AB}$; d) $\frac{AB}{AD}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

9. Punctul M este interior segmentului AB . Dacă:

- a) $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{5}$, aflați $\frac{MB}{MA}, \frac{MA}{AB}, \frac{AB}{MB}$; b) $\frac{MA}{AB} = \frac{2}{7}$, aflați $\frac{AB}{AM}, \frac{MB}{MA}, \frac{MB}{AB}$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele E_1, E_2 situate pe latura AB , astfel încât $AE_1 \equiv E_1E_2 \equiv E_2B$. Paralelele la dreapta BC , construite prin punctele E_1 și E_2 , intersectează latura AC în punctele F_1 , respectiv F_2 . Știind că $AF_1 = 7,5$ cm, calculați \mathcal{P}_{ABC} .

11. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C și D , în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD$ și notăm cu M mijlocul segmentului AB . Arătați că:

- a) segmentele AB, MB, AD și MC sunt proporționale;
b) segmentele DB, DA, BC și MC sunt proporționale.

12. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și punctele M_1, M_2, M_3 situate pe latura AD , astfel încât $AM_1 \equiv M_1M_2 \equiv M_2M_3 \equiv M_3D$. Paralelele la dreapta AB , construite prin punctele M_1, M_2 și M_3 , intersectează latura BC în punctele N_1, N_2 , respectiv N_3 . Dacă $AD = 16$ cm și $BC = 20$ cm, calculați lungimile segmentelor:

- a) AM_1, M_1M_2, M_2M_3 și M_3D ; b) BN_1, N_1N_2, N_2N_3 și N_3C .

13. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D și E în această ordine, astfel încât $BC = 2AB, BC \equiv CD$ și $DE \equiv AB$. Arătați că:

- a) segmentele AB, AC, CE și DE sunt proporționale;
b) segmentele AC, BC, CD și CE sunt proporționale.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Fie D și E două puncte interioare segmentului AB . Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$, arătați că punctele D și E sunt identice.

15. În triunghiul ABC , notăm cu M mijlocul laturii BC și construim $ME \perp AB, E \in AB$ și $MF \perp AC, F \in AC$. Arătați că segmentele AB, AC, ME și MF sunt proporționale.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

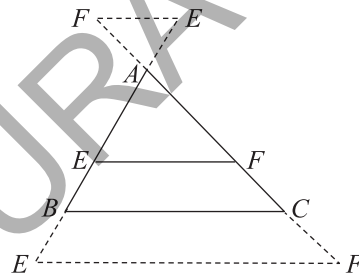
- (3p) 1. Punctul D este situat pe segmentul EF , astfel încât $ED = 2DF$. Determinați rapoartele:
- a) $\frac{ED}{EF}$; b) $\frac{FD}{FE}$; c) $\frac{FD}{DE}$.
- (3p) 2. Arătați că segmentele AB , CD , MN și PQ sunt proporționale, știind că $AB = 18$ cm, $CD = 35$ cm, $MN = 45$ cm și $PQ = 14$ cm.
- (3p) 3. Punctul P este situat pe segmentul MN , astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{5}{4}$. Aflați rapoartele $\frac{MP}{MN}$ și $\frac{PN}{MN}$.

Lecția 2. Teorema lui Thales



Citesc și rețin

Teorema lui Thales: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi ale triunghiului **segmente proporționale**.



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

Observații:

- Folosind proporțiile derivate cu alți termeni, din teorema lui Thales rezultă și egalitățile: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, $\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC}$ etc.
- Dacă segmentul EF este situat în exteriorul triunghiului ABC , concluzia teoremei lui Thales rămâne adevărată.

- (3p) 3. Notăm cu O punctul în care se intersectează diagonalele pătratului $ABCD$ și construim pătratul $AOBE$. Știind că $AB \cap ED = \{M\}$ și $AB \cap EC = \{N\}$, arătați că $\mathcal{A}_{MNCD} = \frac{2}{3} \mathcal{A}_{ABCD}$.

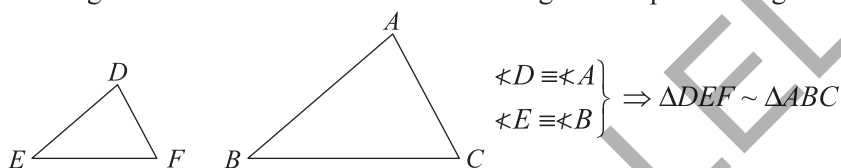
Lecția 6. Criterii de asemănare a triunghiurilor



Citesc și rețin

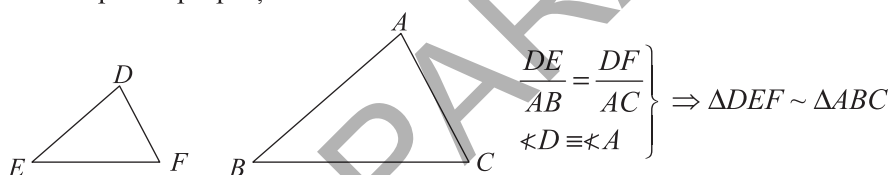
Criteriul de asemănare UU

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au două unghiuri respectiv congruente.



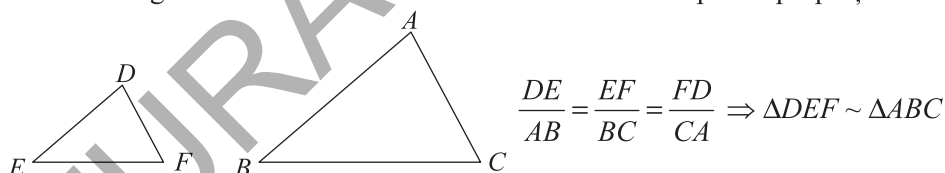
Criteriul de asemănare LUL

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au câte un unghi congruent și laturile care îl formează respectiv proporționale.



Criteriul de asemănare LLL

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au toate laturile respectiv proporționale.

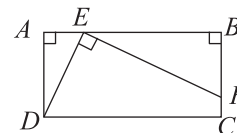


Cum se aplică?

1. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctul E situat pe latura AB . Dacă perpendiculara în E pe dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F , arătați că $\triangle DAE \sim \triangle EBF$.

Soluție:

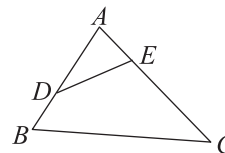
Observăm că $\sphericalangle ADE + \sphericalangle AED = 90^\circ$ și $\sphericalangle BEF + \sphericalangle AED = 90^\circ$, deci $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BEF$, dar $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EBF$, prin urmare $\triangle ADE \sim \triangle BEF$.



2. În triunghiul ABC , cu $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $CA = 12$ cm, considerăm punctele D și E situate pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $AD = 4$ cm și $AE = 2$ cm. Aflați DE .

Soluție:

Observăm că $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ și $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, deci $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ și, deoarece $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$, rezultă că $\triangle EAD \sim \triangle BAC$, prin urmare $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$, așadar $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{DE}{9 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$, de unde rezultă că $DE = 3 \text{ cm}$.

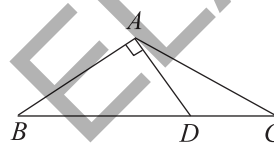


3. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 120^\circ$. Dacă perpendiculara construită în punctul A pe dreapta AB intersectează latura BC în punctul D , arătați că:

- a) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; b) $AC^2 = BC \cdot DC$.

Soluție:

a) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 30^\circ$ și $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC = 30^\circ$, prin urmare $\triangle ABC \sim \triangle DAC$; b) Deoarece $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, rezultă că $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{CA}{CD}$ și din proporția $\frac{BC}{AC} = \frac{CA}{CD}$ obținem $AC^2 = BC \cdot DC$.

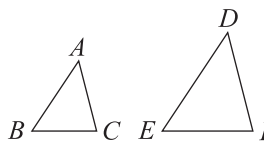


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

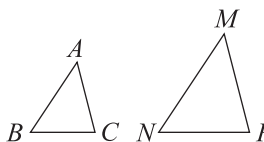
1. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile ABC și DEF . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle F$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
- b) Dacă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



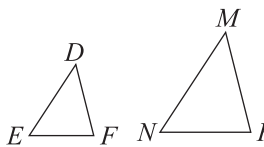
2. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile ABC și MNP . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) Dacă $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.
- b) Dacă $\frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.



3. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile DEF și MNP . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) Dacă $\frac{DE}{MN} = \frac{EF}{NP} = \frac{FD}{PM}$, atunci $\triangle DEF \sim \triangle MNP$.
- b) Dacă $\frac{DE}{MP} = \frac{EF}{PN} = \frac{FD}{NM}$, atunci $\triangle DEF \sim \triangle MPN$.



4. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor pătratului $ABCD$. Arătați că:

- a) $\triangle AOB \sim \triangle ADC$; b) $\triangle ABC \sim \triangle AOD$.

24. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 90^\circ$ considerăm punctele D și E situate pe laturile BC , respectiv AB , astfel încât $AC \equiv BD$ și $BE \equiv DC$. Arătați că $AD^2 = AE \cdot AC$.

25. În triunghiul ascuțitunghic ABC construim înălțimea AD , $D \in BC$ și notăm cu I punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor ABC și ACB . Știind că $AD \cap BI = \{E\}$ și $AD \cap CI = \{F\}$, arătați că $AI^2 = AE \cdot AF$.

26. Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și diagonalele neperpendiculare. Dacă mediatoarele diagonalelor AC și BD intersectează dreptele BD și AC în punctele E , respectiv F , arătați că $\triangle AEC \sim \triangle BFD$.

27. În triunghiul ABC , cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, bisectoarele unghiurilor B și C intersectează laturile AC și AB în punctele D , respectiv E . Dacă $BD \cap CE = \{I\}$, arătați că:

a) $BI^2 = BE \cdot BA$;

b) $CI^2 = CD \cdot CA$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7-8-9/2009)

28. În triunghiul ABC bisectoarea exterioară a unghiului A intersectează bisectoarele unghiurilor ABC și ACB în punctele E , respectiv F . Știind că $BE \cap CF = \{I\}$, arătați că

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BI \cdot BE}{CI \cdot CF}.$$

29. În triunghiul ABC construim înălțimea AD , $D \in BC$. Dacă $\mathcal{C}(R)$ este cercul circumscris triunghiului ABC , arătați că $AB \cdot AC = AD \cdot 2R$.

30. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și punctul M , mijlocul laturii BC . Dacă notăm O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM , respectiv ACM , arătați că $\triangle ABC \sim \triangle MO_1O_2$.

31. Punctul D este situat în interiorul triunghiului ABC , iar punctele E și F sunt situate în exteriorul triunghiului ABC , astfel încât $\triangle ABE \sim \triangle CBD \sim \triangle CAF$. Arătați că $\triangle EBD \sim \triangle DFC$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

32. Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 108^\circ$. Arătați că $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \frac{AB}{BC} = 1$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7/2006)

33. Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A = 108^\circ$. Dacă trisectoarele unghiului A intersectează latura BC în punctele D și E , arătați că $AB^3 = BC^2 \cdot DE$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 1/2015)

34. În triunghiul ABC construim înălțimile BD , $D \in AC$ și CE , $E \in AB$. $BD \cap CE = \{H\}$. Arătați că $\sphericalangle A = 60^\circ$ dacă și numai dacă $\mathcal{P}_{BCH} = 2\mathcal{P}_{DEH}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 11/2015)

35. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle A > 90^\circ$, mediatoarea laturii AB intersectează latura BC și punctul D , iar bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul E . Arătați că $\sphericalangle BAC = 108^\circ$ dacă și numai dacă $AB \parallel ED$.

36. Pe cercul tangent în punctele B și C la laturile AB , respectiv AC ale triunghiului echilateral ABC se consideră punctul T situat pe arcul \widehat{BC} . Dacă $BT \cap AC = \{D\}$ și $CT \cap AB = \{E\}$, arătați că $BC^2 = BT \cdot BD + CT \cdot CE$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 5/2014)

37. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B \in \{30^\circ, 60^\circ\}$ construim mediana AM , $M \in BC$. Dacă mediatoarea segmentului AM intersectează laturile AB și AC în punctele P , respectiv Q , arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor BMP , respectiv CMQ sunt congruente.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Notăm cu H ortocentrul triunghiului DEF . Știind că $DH \cap EF = \{P\}$, arătați că $\triangle EPH \sim \triangle DPF$.
- (3p) **2.** Punctul E este situat în interiorul cercului $\mathcal{C}(O)$. Două drepte ce trec prin punctul E intersectează cercul în punctele A și B , respectiv C și D . Arătați că $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.
- (3p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului $ABCD$, iar cu M și N notăm mijloacele bazelor AB , respectiv CD . Arătați că punctele M , O și N sunt coliniare.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (1p) **1.** Dacă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $\sphericalangle B = 50^\circ$ și $\sphericalangle C = 60^\circ$, atunci măsura unghiului P este egală cu:
A. 50° ; B. 70° ; C. 65° ; D. 75° .
- (1p) **2.** Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{3}{5}$ și $DF = 10$ cm, atunci lungimea laturii AC este egală cu:
A. 4 cm; B. 5 cm; C. 6 cm; D. 8 cm.
- (1p) **3.** Triunghiul DEF cu $DE = 10$ cm și $EF = 15$ cm este asemenea cu triunghiul MNP cu $MN = 4$ cm, $NP = 6$ cm și $PM = 8$ cm prin criteriul LLL dacă:
A. $FD = 20$ cm; B. $FD = 6$ cm; C. $FD = 8$ cm; D. $FD = 15$ cm.
- (1p) **4.** Triunghiul ABC cu $BC = 6$ cm, $\sphericalangle C = 59^\circ$ și $CA = 9$ cm este asemenea cu triunghiul DEF cu $EF = 10$ cm și $FD = 15$ cm prin criteriul LUL dacă:
A. $\sphericalangle D = 49^\circ$; B. $\sphericalangle E = 39^\circ$; C. $\sphericalangle F = 59^\circ$; D. $\sphericalangle E = 59^\circ$.

(1p) 5. Dacă $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{2}{3}$, atunci ra-

portul $\frac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{MNP}}$ este egal cu:

- A. $\frac{9}{4}$; B. $\frac{16}{49}$; C. $\frac{25}{36}$; D. $\frac{4}{9}$.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

(1p) 1. Știind că $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, $DE = 6$ cm, $EF = 9$ cm, $FD = 12$ cm și $\mathcal{P}_{MNP} = 36$ cm, determinați raportul de asemănare a celor două triunghiuri.

(1p) 2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F situate pe latura AB , astfel încât $AE \equiv EF \equiv FB$, $EC \cap FD = \{M\}$. Știind că $MC = 9$ cm și $MF = 5$ cm, calculați ME și MD .

(1p) 3. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de 12 cm și punctul E situat pe latura AB , astfel încât $BE = 9$ cm. Construim $DT \perp CE$, $T \in CE$. Știind că $CE = 15$ cm, arătați că $DT = 9,6$ cm.

(1p) 4. Se consideră paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 20$ cm, $BC = 16$ cm, $AC = 24$ cm și punctele E și F situate pe laturile CD , respectiv DA . Se știe că $EF \cap AB = \{M\}$, $EF \cap BC = \{N\}$, $AM = 5$ cm și $CN = 4$ cm.

a) Calculați CE și AF . b) Calculați \mathcal{P}_{BMN} .

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(1p) 1. Dacă $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, $\sphericalangle F = 43^\circ$ și $\sphericalangle M = 80^\circ$, atunci măsura unghiului N este egală cu:

- A. 53° ; B. 45° ; C. 57° ; D. 62° .

(1p) 2. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{7}{2}$ și $AB = 21$ cm,

atunci lungimea laturii MN este egală cu:

- A. 6 cm; B. 7 cm; C. 8 cm; D. 9 cm.

(1p) 3. Triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 49^\circ$, $AC = 11$ cm și $\sphericalangle C = 61^\circ$ este asemenea cu triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 49^\circ$ și $DF = 22$ cm prin criteriul ULU dacă:

- A. $\sphericalangle E = 45^\circ$; B. $\sphericalangle F = 61^\circ$; C. $\sphericalangle E = 61^\circ$; D. $\sphericalangle F = 57^\circ$.

(1p) 4. Triunghiul MNP cu $MN = 6$ cm și $NP = 9$ cm este asemenea cu triunghiul DEF cu $DE = 4$ cm, $EF = 6$ cm și $FD = 8$ cm prin criteriul LLL dacă:

- A. $PM = 8$ cm; B. $PM = 15$ cm; C. $PM = 12$ cm; D. $PM = 6$ cm.

(1p) 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E situate pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă $AD = 6$ cm, $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm și $CA = 25$ cm, atunci \mathcal{P}_{ADE} este egal cu:

- A. 42 cm; B. 16 cm; C. 18 cm; D. 24 cm.

Capitolul IV

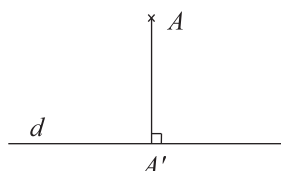
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă



Citesc și rețin

Definiție: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreapta respectivă.

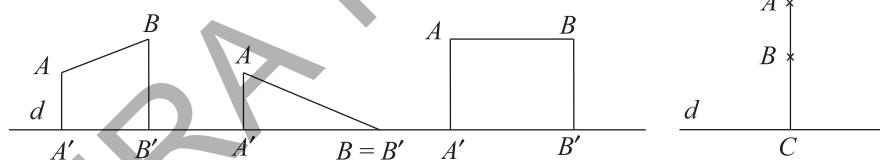


Notăm $pr_d A = A'$.

Teoremă:

Proiecția unui segment pe o dreaptă este:

- un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe dreapta respectivă;
- un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe dreapta respectivă.



Notăm $pr_d AB = A'B'$

$pr_d AB = C$

Matematică. Clasa a VII-a



Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul DEF ; cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, din figura alăturată.

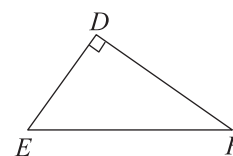
Alegeți răspunsul corect:

A. $pr_{DE} F = E$;

B. $pr_{DE} F = D$.

Soluție:

Deoarece $FD \perp DE$, rezultă că răspunsul corect este B, $pr_{DE} F = D$.



Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90^\circ$. Determinați:
a) $pr_{AD} CD$; b) $pr_{AB} DA$; c) $pr_{AD} BA$.
7. Se consideră pătratul $ABCD$. Determinați:
a) $pr_{BD} AB$; b) $pr_{AC} AD$; c) $pr_{AB} DC$.
8. Se consideră rombul $ABCD$. Determinați:
a) $pr_{AC} AB$; b) $pr_{BD} CD$; c) $pr_{AC} BC$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

9. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $pr_{AC} AB$ și $pr_{BD} BC$ au lungimile egale cu $3\sqrt{6}$ cm, respectiv $2\sqrt{3}$ cm.
10. Calculați perimetrul rombului $DEFG$, știind că $pr_{DF} DE = 9$ cm și $pr_{EG} DG = 12$ cm.
11. Trapezul $DEFG$ cu $DE \parallel FG$ are diagonalele perpendiculare și $\sphericalangle D = 90^\circ$. Știind că $pr_{DF} DE = 6$ cm și $pr_{EG} FG = 8$ cm, calculați înălțimea trapezului.
12. Calculați perimetrul pătratului $ABCD$, știind că proiecția laturii AD pe diagonala BD are lungimea egală cu $3\sqrt{2}$.
13. Trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$ are diagonalele perpendiculare. Știind că $pr_{NQ} PQ$ și $pr_{MP} NP$ sunt segmente congruente, arătați că trapezul este isoscel.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC și notăm cu D proiecția punctului A pe ipotenuza BC . Arătați că lungimea segmentului AD este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.
15. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AC \perp BD$. Dacă $pr_{DC} AC$ și $pr_{AB} BD$ au lungimile egale cu $6\sqrt{3}$ cm, respectiv $2\sqrt{6}$ cm, calculați AD .



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Trapezul $DEFG$ cu $DE \parallel FG$ are diagonalele perpendiculare. Determinați:
a) $pr_{DF} GF$; b) $pr_{EG} D$; c) $pr_{EG} EF$.
- (3p) 2. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$. Știind că $pr_{MN} MP$ și $pr_{MQ} MP$ au lungimile egale cu $5\sqrt{2}$ cm, respectiv $3\sqrt{2}$ cm, calculați P_{MNPQ} și S_{MNPQ} .
- (3p) 3. Se consideră pătratul $ABCD$. Știind că $pr_{AC} AB$ are lungimea egală cu 4 cm, calculați P_{ABCD} .

Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

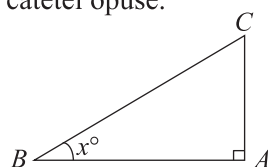


Citesc și rețin

Definiții:

Într-un triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit cu măsura de x° numim:

- **sinus de x°** , notat **$\sin x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei;
- **cosinus de x°** , notat **$\cos x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei;
- **tangentă de x°** , notată **$\text{tg } x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate;
- **cotangentă de x°** , notată **$\text{ctg } x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse.



$$\sin x^\circ = \frac{AC}{BC}, \quad \cos x^\circ = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{tg } x^\circ = \frac{AC}{AB}, \quad \text{ctg } x^\circ = \frac{AB}{AC}.$$

Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangentă se numesc **funcții trigonometrice**.

Proprietățile funcțiilor trigonometrice:

- $\sin x^\circ = \cos(90^\circ - x^\circ),$ $\cos x^\circ = \sin(90^\circ - x^\circ),$
 $\text{tg } x^\circ = \text{ctg}(90^\circ - x^\circ),$ $\text{ctg } x^\circ = \text{tg}(90^\circ - x^\circ);$
- $\sin x^\circ < 1, \cos x^\circ < 1;$
- $\sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = 1.$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile cu măsura de $30^\circ, 45^\circ$ și 60° :

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



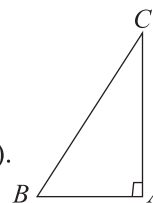
Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $CA = 4$ cm. Calculați:

- a) $\sin(\sphericalangle B)$; b) $\cos(\sphericalangle B)$; c) $\text{tg}(\sphericalangle C)$; d) $\text{ctg}(\sphericalangle C)$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(\sphericalangle B) &= \frac{AC}{BC} = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,8; & \text{b) } \cos(\sphericalangle B) &= \frac{AB}{BC} = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,6; \\ \text{c) } \operatorname{tg}(\sphericalangle C) &= \frac{AB}{AC} = \frac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0,75; & \text{d) } \operatorname{ctg}(\sphericalangle C) &= \frac{AC}{AB} = \frac{4 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 1,(\overline{3}). \end{aligned}$$



2. În triunghiul MNP , construim înălțimea MD , D este punct interior laturii NP . Știind că $MD = 6 \text{ cm}$, $ND = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $MP = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, determinați:

- a) $\sphericalangle MNP$; b) $\sphericalangle MPN$; c) $\sphericalangle NMP$.

Soluție:

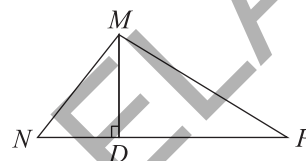
a) În $\triangle MDN$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, avem $\operatorname{tg}(\sphericalangle N) = \frac{MD}{ND}$, deci

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle N) = \frac{6 \text{ cm}}{2\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}, \text{ așadar } \operatorname{tg}(\sphericalangle N) = \sqrt{3},$$

de unde rezultă că $\sphericalangle MNP = 60^\circ$;

b) În $\triangle MDP$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, avem $\sin(\sphericalangle P) = \frac{MD}{MP}$, deci $\sin(\sphericalangle P) = \frac{6 \text{ cm}}{6\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, așadar $\sin(\sphericalangle P) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă că $\sphericalangle MPN = 45^\circ$;

c) $\sphericalangle NMP = 180^\circ - \sphericalangle MNP - \sphericalangle MPN = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.



3. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{6} \text{ cm})$ se consideră punctele D, E și F , astfel încât segmentul EF este diametru și $\widehat{DE} = 2\widehat{DF}$. Calculați:

- a) \mathcal{A}_{DEF} ; b) $d(D, EF)$.

Soluție:

a) $\sphericalangle EDF = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; $\widehat{DE} + \widehat{DF} = 180^\circ$ sau $2\widehat{DF} + \widehat{DF} = 180^\circ$, deci $3\widehat{DF} = 180^\circ$, de unde rezultă că $\widehat{DF} =$

$= 180^\circ : 3 = 60^\circ$, deci $\sphericalangle DEF = 30^\circ$. În $\triangle DEF$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, avem: $\sin(\sphericalangle E) = \frac{DF}{EF}$ sau

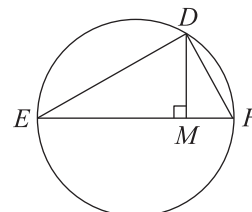
$\sin 30^\circ = \frac{DF}{4\sqrt{6}}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{DF}{4\sqrt{6}}$, de unde rezultă că $DF = 2\sqrt{6} \text{ cm}$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle E) = \frac{DF}{DE}$ sau

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{DE}$, deci $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{DE}$, de unde rezultă că $DE = 6\sqrt{2} \text{ cm}$; $\mathcal{A}_{DEF} = \frac{DE \cdot DF}{2} =$

$= \frac{6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$;

b) Construim $DM \perp EF$, $M \in EF$. În $\triangle DEM$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$, avem: $\sin(\sphericalangle E) = \frac{DM}{DE}$

sau $\sin 30^\circ = \frac{DM}{6\sqrt{2}}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{DM}{6\sqrt{2}}$, de unde rezultă că $DM = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.





Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF , cu $\sphericalangle D = 90^\circ$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\cos(\sphericalangle E) = \frac{DE}{EF}$;

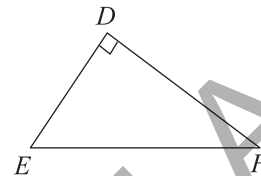
b) $\text{tg}(\sphericalangle F) = \frac{DF}{DE}$;

c) $\sin(\sphericalangle F) = \frac{DF}{EF}$;

d) $\sin(\sphericalangle E) = \frac{DF}{EF}$;

e) $\text{ctg}(\sphericalangle F) = \frac{DF}{EF}$;

f) $\cos(\sphericalangle F) = \frac{DF}{DE}$;



2. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $CA = 8$ cm. Calculați:

a) $\sin(\sphericalangle B)$;

b) $\sin(\sphericalangle C)$;

c) $\cos(\sphericalangle B)$;

d) $\cos(\sphericalangle C)$;

e) $\text{ctg}(\sphericalangle B)$;

f) $\text{tg}(\sphericalangle C)$;

g) $\text{tg}(\sphericalangle B)$;

h) $\text{ctg}(\sphericalangle C)$.

c)

h)

3. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sin(\sphericalangle B) = 0,25$. Știind că:

a) $AC = 10$ cm, calculați BC ;

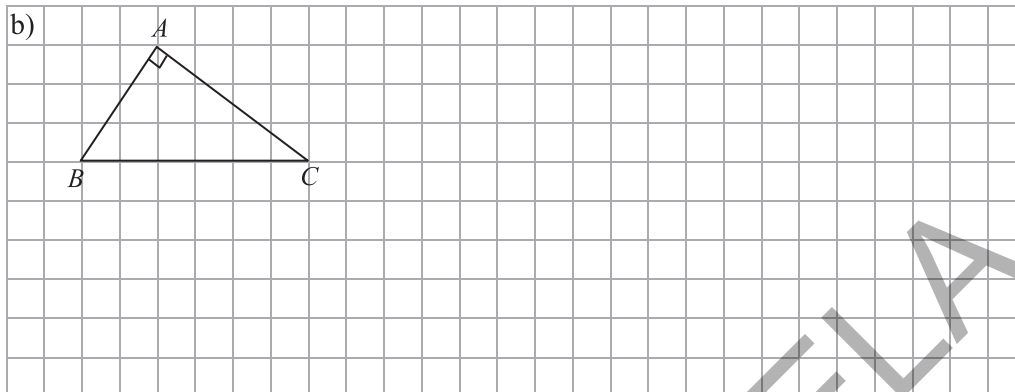
b) $BC = 12$ cm, calculați AC .

b)

4. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\text{tg}(\sphericalangle C) = 1,2$. Știind că:

a) $AC = 15$ cm, calculați AB ;

b) $AB = 24$ cm, calculați AC .



5. Precizați măsura unghiului E în următoarele cazuri:

a) $\sin(\sphericalangle E) = \frac{1}{2}$; b) $\cos(\sphericalangle E) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\text{tg}(\sphericalangle E) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\sin(\sphericalangle E) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\cos(\sphericalangle E) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\text{ctg}(\sphericalangle E) = 1$; g) $\text{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$; h) $\sin(\sphericalangle E) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) $\sphericalangle E =$	b) $\sphericalangle E =$
c) $\sphericalangle E =$	d) $\sphericalangle E =$
e) $\sphericalangle E =$	f) $\sphericalangle E =$
g) $\sphericalangle E =$	h) $\sphericalangle E =$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\cos(\sphericalangle B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Știind că:

a) $AB = 2\sqrt{6}$ cm, calculați BC ;

b) $BC = 24$ cm, calculați AB .

7. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\text{ctg}(\sphericalangle C) = 0,8(3)$. Știind că:

a) $AB = 18$ cm, calculați AC ;

b) $AC = 20$ cm, calculați AB .

8. Calculați:

a) $(\sin 60^\circ + \text{tg } 30^\circ) \cdot \text{ctg } 30^\circ$;

b) $(\text{ctg } 30^\circ + \text{tg } 60^\circ) : \sin 60^\circ$;

c) $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 \cdot \cos 60^\circ$;

d) $(\text{ctg } 60^\circ - \cos 30^\circ)^3 : \sin 60^\circ$.

9. În triunghiul echilateral ABC , construim înălțimea AD , $D \in BC$. Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că:

a) $AD = 4\sqrt{3}$ cm;

b) $AD = 12$ cm;

c) $AD = 3\sqrt{6}$ cm.

10. În triunghiul ABC construim înălțimea AD , D este punct interior laturii BC . Știind că $AD = 8\sqrt{3}$ cm, calculați BC în următoarele cazuri:

- a) $\sphericalangle B = 30^\circ$ și $\sphericalangle C = 45^\circ$; b) $\sphericalangle B = 45^\circ$ și $\sphericalangle C = 60^\circ$.

11. În triunghiul ABC construim înălțimea AD , D este punct interior laturii BC . Știind că $BD = 6$ cm și $CD = 9$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC în următoarele cazuri:

- a) $\sphericalangle B = 45^\circ$ și $\sphericalangle C = 30^\circ$; b) $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $\sphericalangle C = 45^\circ$.

12. Notăm cu x măsura unui unghi ascuțit. Știind că:

- a) $\cos x = \frac{4}{5}$, aflați $\sin x$; b) $\sin x = \frac{1}{3}$, aflați $\cos x$;
 c) $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, aflați $\sin x$; d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, aflați $\cos x$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Calculați perimetrul triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, în următoarele cazuri:

- a) $AB = 2\sqrt{7}$ cm și $\sin(\sphericalangle B) = 0,75$; b) $AC = 3\sqrt{5}$ cm și $\cos(\sphericalangle B) = 0,6$.

14. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, construim înălțimea AD , $D \in BC$. Știind că:

- a) $\operatorname{tg}(\sphericalangle B) = 1,5$ și $CD = 18$ cm, aflați BD ; b) $\operatorname{ctg}(\sphericalangle C) = 1,2$ și $BD = 5$ cm, aflați CD .

15. Arătați că numerele:

- a) $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$ și $\sin 60^\circ$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic;
 b) $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$ și $\cos 60^\circ$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

16. Dacă x este măsura unui unghi ascuțit, arătați că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

17. Arătați că:

- a) $\frac{1}{(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ)} \in \mathbb{N}$;
 b) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{(\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ)^2} - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ)^2}} \in \mathbb{Q}$.

18. În triunghiul DEF , construim înălțimea DN , N este punct interior laturii EF . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului DEF , știind că:

- a) $DE = 8\sqrt{3}$ cm, $DN = 4\sqrt{6}$ cm și $NF = 12\sqrt{2}$ cm;
 b) $EN = 6\sqrt{2}$ cm, $FN = 6\sqrt{6}$ cm și $DF = 12\sqrt{3}$ cm.

19. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$, în care $\sphericalangle PMQ = 2 \cdot \sphericalangle PMN$. Calculați perimetrul dreptunghiului $MNPQ$, știind că:

- a) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 25\sqrt{3}$ cm²; b) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 54\sqrt{3}$ cm².

20. Triunghiul ascuțitunghic DEF cu $\sphericalangle D = 60^\circ$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Determinați raza cercului în următoarele cazuri:

- a) $EF = 12\sqrt{3}$ cm; b) $EF = 6\sqrt{2}$ cm.

34. O dreaptă d care trece prin vârful C al dreptunghiului $ABCD$ intersectează dreptele AB și AD în punctele E , respectiv F . Arătați că $2CB \cdot CD \leq CE \cdot CF$.

35. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctul D situat pe latura BC . Dacă notăm cu $\sphericalangle A_1$ și $\sphericalangle A_2$ unghiurile BAD , respectiv CAD și cu $\sphericalangle D$ unghiul ascuțit cu vârful în punctul D , arătați că $\sin(\sphericalangle A_1) + \sin(\sphericalangle A_2) = \sin(\sphericalangle D)$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2023)

36. Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$ și punctul T situat pe latura BC . Construim $TM \perp AB$, $M \in AB$ și $TN \perp AC$, $N \in AC$. Arătați că $\sphericalangle A = 90^\circ$ dacă și numai dacă $AM + AN = BM + CN$.

37. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Arătați că $BC^2 \geq \frac{AB^2 + AC^2}{2}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7-8/2008)

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

38. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele D , E și F situate pe laturile AB , BC , respectiv CA . Arătați că $\mathcal{P}_{DEF} \geq \frac{\mathcal{P}_{ABC}}{2}$.

39. Triunghiul ascuțitunghic ABC are $\sphericalangle A = 45^\circ$. Arătați că $(\operatorname{tg}(\sphericalangle B) - 1)(\operatorname{tg}(\sphericalangle C) - 1) = 2$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2017)

40. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și punctul T este situat pe arcul \widehat{BC} . Dacă notăm cu D și E proiecțiile punctului T pe dreptele AB , respectiv AC și cu u măsura unghiului format de dreptele BC și DE , arătați că $DE = BC \cdot \cos u$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 6-7-8/2016)

41. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și notăm cu M , N și P mijloacele laturilor AB , BC , respectiv CA . Dacă notăm cu D , E și F proiecțiile punctelor A , B și C pe dreptele MP , MN , respectiv NP , arătați că dreptele MF , ND și PE sunt concurente.

42. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și notăm cu A' , B' și C' proiecțiile punctelor A , B , respectiv C pe laturile opuse. Dacă notăm cu M , N și P proiecțiile punctelor A , B și C pe dreptele $B'C'$, $C'A'$, respectiv $A'B'$, arătați că dreptele $A'M$, $B'N$ și $C'P$ sunt concurente.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră triunghiul MNP . Știind că $\sin(\sphericalangle N) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\operatorname{ctg}(\sphericalangle P) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

determinați măsura unghiului M .

(3p) **2.** Triunghiul echilateral DEF este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 4\sqrt{6} \text{ cm})$. Calculați aria triunghiului DEF .

Teste pentru evaluarea cunoștințelor

Capitolele: Ecuații și sisteme de ecuații liniare, Elemente de organizare a datelor, Asemănarea triunghiurilor, Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Dacă reprezentăm punctul $A(-3, -5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy , atunci acesta este situat în cadranul:
A. I; B. II; C. III; D. IV.
- (7p) 2. Soluția ecuației $\sqrt{7}x + 1 = 8$, unde $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:
A. 3; B. $\sqrt{7}$; C. $\sqrt{5}$; D. 4.
- (7p) 3. Se consideră mulțimile $E = \{a, b\}$ și $F = \{c\}$. Mulțimea $E \times F$ este egală cu:
A. $\{(a, c), (b, c)\}$; B. $\{(a, b), (a, c)\}$; C. $\{(c, a), (c, b)\}$; D. $\{(c, b), (a, b)\}$.
- (7p) 4. Între mulțimile $A = \{-1, 2\}$ și $B = \{-1, -4\}$ se stabilește o dependență funcțională aplicând regula:
A. $x \rightarrow 2x$; B. $x \rightarrow (-x)^2$; C. $x \rightarrow -x^2$; D. $x \rightarrow 3x$.
- (7p) 5. Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90^\circ$. Dacă $\operatorname{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$, atunci măsura unghiului F este egală cu:
A. 60° ; B. 45° ; C. 30° ; D. 75° .
- (7p) 6. Perimetrul triunghiului ABC cu măsura unghiului A egală cu 90° , $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm este egal cu:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Calculați distanța, exprimată în centimetri, dintre punctele M și N , reprezentate în sistemul de axe ortogonale xOy , știind că $M(8, 3)$ și $N(1, 4)$.
- (8p) 2. Dublul sumei dintre 1,(3) și un sfert dintr-un număr rațional este egal cu diferența dintre triplul numărului respectiv și 0,(6). Aflați numărul.
- (8p) 3. Rezolvați sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2(3x - \sqrt{2}) + 5y = -\sqrt{2} \\ 4x - 3(2y + \sqrt{2}) = 7\sqrt{2} \end{cases}$$
, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- (8p) 4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M, N și P situate pe segmentele AD, BD , respectiv BC , astfel încât $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$ și $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{4}$.
Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare.
5. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și punctul D situat pe latura BC , astfel încât $AD = 13$ cm.
- (8p) a) Calculați distanța de la punctul A la dreapta BC .
- (8p) b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor ABD și ACD .

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (5p) 1. Rădăcina pătrată a numărului natural 49 este egală cu:
 a) 4; b) 9; c) 7; d) 5.
- (5p) 2. Dacă card $E = 2$ și card $F \times E = 10$, atunci card F este egal cu:
 a) 5; b) 6; c) 7; d) 8.
- (5p) 3. Suma numerelor reale $\sqrt{5}$ și $-\sqrt{20}$ este egală cu:
 a) $-\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{5}$; c) $5\sqrt{2}$; d) $-\sqrt{5}$.
- (5p) 4. Cel mai mare număr din mulțimea $\{-7\sqrt{5}, -6\sqrt{7}, -9\sqrt{3}, -11\sqrt{2}\}$ este:
 a) $-7\sqrt{5}$; b) $-6\sqrt{7}$; c) $-9\sqrt{3}$; d) $-11\sqrt{2}$.
- (5p) 5. Patru elevi, Dan, Vali, Gabi și Ina efectuează calculul $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$, pentru $x = 1,6) \cdot 4,2(6)$ și $y = 1,3(8) : 0,5$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul următor:

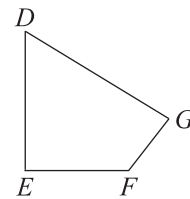
Dan	Vali	Gabi	Ina
4	1	7	6

Rezultatul corect a fost obținut de către:

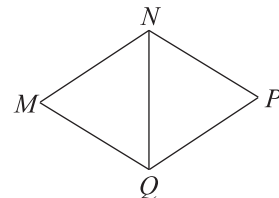
- a) Dan; b) Vali; c) Gabi; d) Ina.
- (5p) 6. Afirmatia „în sistemul de axe ortogonale xOy , punctul $T(-5, 0)$ este reprezentat pe axa Ox ” este:
 a) adevărată b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (5p) 1. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $DEFG$. Se știe că $\sphericalangle D = 50^\circ$, $\sphericalangle E = 90^\circ$ și $\sphericalangle F = 2\sphericalangle D$. Măsura unghiului G este egală cu:
 a) 100° ; b) 120° ;
 c) 110° ; d) 130° .

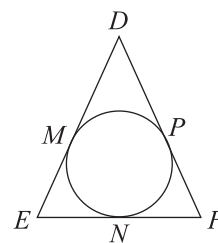


- (5p) 2. În figura alăturată este reprezentat rombul $MNPQ$. Se știe că $NQ = 4$ cm și că $\mathcal{A}_{MNPQ} = 16$ cm². Perimetrul rombului $MNPQ$ este egal cu:
 a) 20 cm; b) 24 cm;
 c) $8\sqrt{5}$ cm; d) $6\sqrt{7}$ cm.



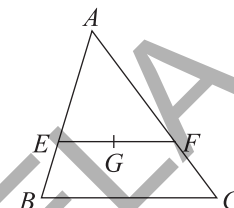
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF și am notat cu M , N și P punctele de tangență ale laturilor DE , EF , respectiv FD cu cercul înscris în triunghi. Se știe că $DE = 6$ cm, $EF = 7$ cm și $FD = 8$ cm. Suma $DM + EN + FP$ este egală cu:

- a) 10,5 cm; b) 12,4 cm;
c) 10,6 cm; d) 16,2 cm.



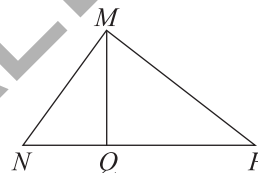
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC . Dreapta EF trece prin punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC , și este paralelă cu latura BC . Se știe că $\mathcal{P}_{ABC} = 18$ cm. Perimetrul triunghiului AEF este egal cu:

- a) 14 cm; b) 16 cm;
c) 18 cm; d) 12 cm.



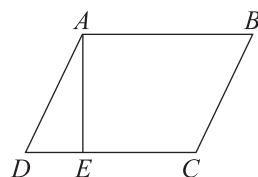
- (5p) 5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ și înălțimea MQ , $Q \in NP$. Se știe că proiecțiile catetelor pe ipotenuză au lungimi egale cu $2\sqrt{6}$ cm, respectiv $3\sqrt{6}$ cm. Aria triunghiului MNP este egală cu:

- a) $16\sqrt{6}$ cm²; b) $15\sqrt{6}$ cm²;
c) $18\sqrt{6}$ cm²; d) $12\sqrt{6}$ cm².



- (5p) 6. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ și înălțimea AE , $E \in CD$. Se știe că $BC = 2\sqrt{6}$ cm și $AE = 3\sqrt{2}$ cm. Măsura unghiului DAB este egală cu:

- a) 90° ; b) 60° ;
c) 120° ; d) 150° .



Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră numărul real:

$$x = \left[\sqrt{2}(\sqrt{14} - \sqrt{56} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{42}) + \sqrt{3}(2\sqrt{21} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{105}) \right] : \sqrt{35}.$$

- (3p) a) Arătați că $x = -\sqrt{5}$.

- (2p) b) Calculați $|x^3| + x^5$.

2. În sistemul de axe ortogonale xOy sunt reprezentate punctele $A\left(\frac{7}{9}, -\frac{3}{2}\right)$ și

$$B\left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{2}\right), \text{ folosind o unitate de măsură cu lungimea de 1 cm.}$$

- (2p) a) Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .

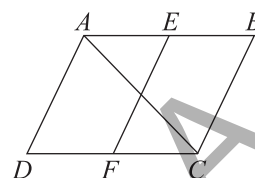
- (3p) b) Rotunjiți la a doua zecimală distanța dintre punctele A și B .

3. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 14 \\ 7x - 2y = 4\sqrt{2} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(3p) a) Arătați că soluția sistemului de ecuații este perechea $(2\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

(2p) b) Calculați media geometrică a numerelor reale x și y .

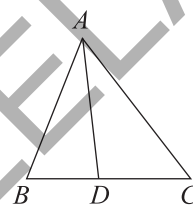
4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ și am notat cu E și F mijloacele laturilor AB , respectiv CD . Se știe că $\sphericalangle DAB \equiv 2\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle ACD$.



(3p) a) Arătați că $AB = 2BC$.

(2p) b) Arătați că $EF \perp AC$.

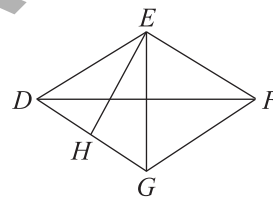
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC . Bisectoarea unghiului BAC intersectează latura BC în punctul D . Se știe că $BD = 6$ cm, $CD = 10$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 48$ cm.



(2p) a) Calculează $AB + AC$.

(3p) b) Calculează AB și AC .

6. În figura alăturată este reprezentat rombul $DEFG$ și înălțimea EH , $H \in DG$. Se știe că $DF = 4\sqrt{6}$ cm și $EG = 4\sqrt{3}$ cm.



(2p) a) Calculați \mathcal{P}_{DEFG} .

(3p) b) Calculați \mathcal{A}_{EFGH} .

Testul 2

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) 1. Numărul $\sqrt{1,21}$ aparține mulțimii:

- a) \mathbb{N} ; b) \mathbb{Q} ; c) \mathbb{Z} ; d) \mathbb{I} .

(5p) 2. Dacă $E = \{a, b, c\}$ și $F = \{b, d\}$, atunci cardinalul mulțimii $E \times F$ este egal cu:

- a) 12; b) 6; c) 5; d) 15.

(5p) 3. Produsul numerelor reale $2\sqrt{10}$ și $10\sqrt{2}$ este egal cu:

- a) $20\sqrt{2}$; b) $12\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{10}$; d) $40\sqrt{5}$.

(5p) 4. Soluția ecuației $\sqrt{54} - \sqrt{3}x = 2\sqrt{6}$ este egală cu:

- a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{6}$; d) $\sqrt{5}$.

(5p) 5. Patru elevi, Ioana, Vlad, Radu și Irina calculează distanța dintre punctele $A(3, -5)$ și $B(-1, -2)$, reprezentate în sistemul de axe ortogonale xOy . Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul următor:

Ioana	Vlad	Radu	Irina
$4u$	$8u$	$6u$	$5u$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. a) A; b) A; c) A; d) A. 2. a) A; b) A; c) A; d) A. 3. a) $24x = 36y \Leftrightarrow 24x : 4 = 36y : 4 \Leftrightarrow 6x = 9y$; b) și c) analog. 4. a) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) Analog.
5. a) $2z = 5t \Leftrightarrow 10 \cdot 2z = 10 \cdot 5t \Leftrightarrow 20z = 50t$; b) $2z = 5t \Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot 2z = \frac{1}{10} \cdot 5t \Leftrightarrow \frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2z = 5t \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot 2z = \sqrt{7} \cdot 5t \Leftrightarrow 2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$. 6. a) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{3} = (2\sqrt{3}y) : \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 2y$; b) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : 2\sqrt{3} = (2\sqrt{3}y) : 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = y$; c) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{6} = (2\sqrt{3}y) : \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}y$. 7. Egalitățile se împart cu 5, respectiv cu 7 și se adună membru cu membru. 8. $6a^4 = 6b^4 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$. 9. a) $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$.
10. a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{xy + 2x + 2y + 4}{2} = \frac{x(y + 2) + 2(y + 2)}{2} = \frac{(y + 2)(x + 2)}{2} = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{xy + 3x - 3y + 9}{3} = \frac{x(y - 3) - 3(y - 3)}{3} = \frac{(y - 3)(x - 3)}{3} = \frac{1}{3}(x - 3) \cdot (y - 3)$. 11. Adunând membru cu membru cele 3 egalități, obținem $3(x + y + z) = 9\sqrt{7}$, de unde obținem $x + y + z = 3\sqrt{7}$. 12. Înmulțind membru cu membru cele 3 egalități, obținem $a^2b^2c^2 = 216$, deci $abc = \sqrt{216}$ sau $abc = 6\sqrt{6}$. 13. a) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$; b) $x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - xy - xy + y^2 = x(x - y) - y(x - y) = (x - y)(x - y) = (x - y)^2$. 14. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-c}{c} + \frac{1-a}{a} + \frac{1-b}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} - 1 + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. 15. $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + yz}{xyz + x^3} + \frac{y^2 + zx}{xyz + y^3} + \frac{z^2 + xy}{xyz + z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + yz}{x(x^2 + yz)} + \frac{y^2 + zx}{y(y^2 + zx)} + \frac{z^2 + xy}{z(z^2 + xy)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = y \Leftrightarrow x\sqrt{2} = y\sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$. 2. $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y \Leftrightarrow (\sqrt{10}x) : \sqrt{2} = (\sqrt{14}y) : \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$. 3. $4a = 5b \Leftrightarrow 4a \cdot 3 = 5b \cdot 3 \Leftrightarrow 12a = 15b$; $14c = 10d \Leftrightarrow (14c) : 2 = (10d) : 2 \Leftrightarrow 7c = 5d$. Din $12a = 15b$ și $7c = 5d$ rezultă că $12a + 7c = 15b + 5d$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

1. a) A; b) A; c) A; d) F. 2. a) $\frac{MP}{MN} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{MQ}{MN} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{MQ}{PN} = 1$; d) $\frac{NQ}{NP} = \frac{1}{2}$. 3. a) $\frac{AB}{BE} = \frac{1}{3}$;
 b) $\frac{AC}{BE} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$; d) $\frac{DE}{DA} = \frac{1}{3}$. 4. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$; c) $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$; d) $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{8}$. 5. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{8}$; b) $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{2}$; c) $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$; d) $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$. 6. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}$; b) $\frac{AB}{MN} = \frac{EF}{CD}$. 7. a) $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$; c) $\frac{PB}{AM} = \frac{3}{2}$; d) $\frac{AB}{PB} = \frac{4}{3}$. 8. a) $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{DC}{DA} = \frac{2}{5}$; c) $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$; d) $\frac{AB}{AD} = \frac{6}{5}$. 9. a) $\frac{MB}{MA} = \frac{5}{4}$, $\frac{MA}{AB} = \frac{4}{9}$, $\frac{AB}{MB} = \frac{9}{5}$; b) $\frac{AB}{MA} = \frac{7}{2}$, $\frac{MB}{MA} = \frac{5}{2}$, $\frac{MB}{AB} = \frac{5}{7}$. 10. $\mathcal{P}_{ABC} = 67,5$ cm. 11. a) Se arată că $\frac{AB}{AD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{DB}{DA} = \frac{CB}{CM} = \frac{2}{3}$. 12. a) $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3D = 4$ cm; b) $BN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3C = 5$ cm.

13. a) Se arată că $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{2}$. 14. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$, deci $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EB}$, sau $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AB}$, de unde rezultă că $AD \equiv AE$, prin urmare $D = E$.
 15. $\mathcal{S}_{ABM} = \mathcal{S}_{ACM}$, deci $\frac{AB \cdot ME}{2} = \frac{AC \cdot MF}{2}$, de unde rezultă că $AB \cdot ME = AC \cdot MF$ sau $\frac{AB}{AC} = \frac{MF}{ME}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{ED}{EF} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{FD}{FE} = \frac{1}{3}$; c) $\frac{FD}{DE} = \frac{1}{2}$. 2. $\frac{AB}{MN} = \frac{PQ}{CD} = \frac{2}{5}$. 3. $\frac{MP}{MN} = \frac{5}{9}$, $\frac{PN}{MN} = \frac{4}{9}$.

Lecția 2. Teorema lui Thales

1. a) A; b) A; c) F; d) A. 2. a) $FC = 6$ cm; b) $AE = 1$ cm; c) $AC = 40$ cm; d) $AE = 6$ cm; e) $FC = 3$ cm; f) $AB = 15$ cm. 3. a) $MN = 20$ cm; b) $EM = 5$ cm; c) $EM = 6$ cm; d) $FN = 9$ cm; e) $FN = 18$ cm; f) $EM = 21$ cm. 4. a) $AE = 4$ cm; b) $EC = 15$ cm; c) $AD = 4$ cm; d) $DB = 20$ cm. 5. a) $EC = 24$ cm; b) $AE = 5$ cm; c) $DB = 7$ cm; d) $AD = 5$ cm. 6. a) $BF = 16$ cm; b) $ED = 5$ cm; c) $FC = 15$ cm; d) $AE = 21$ cm. 7. a) $\mathcal{P}_{AEDF} = 88$ cm; b) $\mathcal{P}_{AEDF} = 104$ cm; c) $\mathcal{P}_{AEDF} = 108$ cm. 8. a) Dacă $E \in AB$, obținem $AF = 10,5$ cm și $CF = 17,5$ cm, iar dacă $A \in EB$, obținem $AF = 42$ cm și $CF = 70$ cm; b) Dacă $E \in AB$, obținem $AF = 9$ cm și $CF = 6$ cm, iar dacă $B \in AE$, obținem $AF = 45$ cm și $CF = 30$ cm. 9. a) Aplicând teorema bisectoarei obținem $BD = 10$ cm și $CD = 12$ cm; b) Analog obținem $BD = 9$ cm și $CD = 21$ cm. 10. a) Aplicând teorema bisectoarei, obținem $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm; b) Analog obținem $AB = 12$ cm și $AC = 8$ cm.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. A. 3. A. II. 1. $3\sqrt{2}$ cm. 2. $3\sqrt{2}$ cm. 3. 0,75. III. 1. D. $18\sqrt{3}$ cm². 2. C. $\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{3}$.

3. A. 120° . IV. $\mathcal{A}_{AOD} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{4}$, de unde rezultă că $\mathcal{A}_{AOD} = 4\sqrt{3}$ cm², deci $OA \cdot OD \cdot \sin(\sphericalangle O) = 8\sqrt{3}$, de unde obținem $\sin(\sphericalangle O) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. V. a) $EMFN$ este romb. $ME = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ cm, deci $\mathcal{P}_{EMFN} = 8\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ cm; b) $\mathcal{A}_{EMFN} = 2(\mathcal{A}_{AMD} + \mathcal{A}_{ABE}) - \mathcal{A}_{ABCD} = 12\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ cm².

Probleme din realitatea cotidiană

1. $DG = 12$ m. 2. $\mathcal{P}_{MNQ} = 48$ km, $\mathcal{P}_{MPQ} = 36$ km. 3. $EF = 3\sqrt{3}$ km. 4. $\mathcal{A}_d = 4\pi$ dm². 5. $\mathcal{A} = 12\sqrt{3}$ dm² < $12 \cdot 1,75$ dm² = 21 dm². 6. $\mathcal{A}_{ABCD} = 32$ dm². 7. $\mathcal{P}_{ABCD} = 38$ dam. 8. $BE + EC = 16\sqrt{3}$ dam. 9. $\sqrt{3} \simeq 1,7$ și obținem $\mathcal{A} = 7,8$ dm². 10. $DE = 2$ km. 11. $\mathcal{A}_{ABCD} = 6\sqrt{3}$ m². 12. $\mathcal{A} = 100\pi$ m² < $100 \cdot 3,15$ m² = 315 m². 13. $\mathcal{P}_{ABM} = 60$ hm, $\mathcal{P}_{BCD} = 72$ hm, deci $\mathcal{P}_{ABM} < \mathcal{P}_{BCD}$. 14. $\widehat{AB} = 135^\circ$, $\widehat{BC} = 90^\circ$, $\widehat{CA} = 135^\circ$. 15. a) $\sphericalangle DEC = 105^\circ$; b) $\mathcal{P}_{EDC} = 3(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ hm. 16. $L = 4(3\sqrt{3}+2\pi)$ dm. 17. $\mathcal{P}_{BEDF} = 2BE + 2BF = 2 \cdot 36$ m + $2 \cdot 3\sqrt{193}$ m < 72 m + $2 \cdot 3 \cdot 14$ m = 156 m. 18. $\mathcal{A}_{MNQP} = \frac{NP \cdot QM}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$ m² = $25(\sqrt{2}-1)$ m² > $25 \cdot 0,4$ m² = 10 m². 19. $\mathcal{A}_{ABC} = 27$ dm². 20. $L_c = 47,1$ cm și, rotunjind, obținem $L_c = 47$ cm.

TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIINȚELOR

Testul 1: I. 1. C. 2. B. 3. A. 4. C. 5. C. 6. B. II. 1. $MN = 5\sqrt{2}$ cm. 2. $\frac{4}{3}$. 3. $S = \{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$.

4. $\triangle DMN \sim \triangle BPN$, deci $\sphericalangle DNM \equiv \sphericalangle BNP$, prin urmare punctele M , N și P sunt coliniare.

5. a) $d(A, BC) = 12$ cm; b) $\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ACD}} = \frac{4}{21}$ sau $\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ACD}} = \frac{14}{11}$.

Testul 2: I. 1. C. 2. B. 3. D. 4. A. 5. C. 6. B. II. 1. $AB = 2\sqrt{5}$ dm. 2. 60 ha. 3. $S = \{(4, -2)\}$.

4. $\mathcal{A}_{AEF} = 3\sqrt{6}$ cm². 5. a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 128$ cm²; b) $\mathcal{P}_{ABO} = 6(2+\sqrt{5})$ cm.

Testul 3: I. 1. A. 2. D. 3. B. 4. C. 5. B. 6. D. II. 1. $a = -6$. 2. $x = -\sqrt{10}$. 3. 16 copii, 40 bomboane.

4. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m². 5. a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 24$ cm; b) $\mathcal{A}_{BCF} = 9\sqrt{2}$ cm².

TESTE DE EVALUARE FINALĂ

Testul 1: I. 1. c) 2. a) 3. d) 4. d) 5. b) 6. a) II. 1. b) 2. c) 3. a) 4. d) 5. b) 6. c) III. 1. a) $x =$

$= -\sqrt{5}$; b) $|x^3| + x^5 = -20\sqrt{5}$. 2. a) $M\left(\frac{1}{9}, -1\right)$; b) $AB = \frac{5}{3}$ cm = 1,67 cm; 1,67 cm. 3. a) $x =$

$= 2\sqrt{2}$, $y = 5\sqrt{2}$; b) $mg(x, y) = 2\sqrt{5}$. 4. a) $\sphericalangle B = 60^\circ$, deci $\sphericalangle BCD = 120^\circ$ așadar $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ și

$\sphericalangle BAC = 30^\circ$, deci $AB = 2BC$; b) $CE = EA = AF = FC$, deci $AECF$ este romb, prin urmare $EF \perp$

$\perp AC$. 5. a) $AB + AC = 32$ cm; b) Aplicând teorema bisectoarei, rezultă că $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ sau

$\frac{AB}{32-AB} = \frac{3}{5}$, de unde obținem $AB = 12$ cm, deci $AC = 20$ cm. **6. a)** $DE = 6$ cm; $\mathcal{P}_{DEFG} = 24$ cm;

b) $\mathcal{A}_{DEFG} = 24\sqrt{2}$ cm², deci $EH = 4\sqrt{2}$ cm, prin urmare, aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle DEH$, obținem $DH = 2$ cm, deci $GH = 4$ cm; $\mathcal{A}_{AEGH} = 20\sqrt{2}$ cm².

Testul 2: I. 1. b) 2. b) 3. d) 4. a) 5. d) 6. a). II. 1. d) 2. b) 3. c) 4. c) 5. a) 6. b). III. 1. a) $x = \frac{1}{6}$; **b)** $x = 0,1(6); 0,17$. **2. a)** $\frac{1+ab}{1+c} = \frac{abc+ab}{1+c} = \frac{ab(c+1)}{1+c} = ab$; **b)** $ab + bc + ca = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. **3. a)** $x = -\sqrt{2}$; **b)** $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \cdot y + x : y = 3 \in \mathbb{N}$.

4. a) $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACO = 90^\circ$, deci $\sphericalangle BAC = 60^\circ$; **b)** $\sphericalangle BAO = 30^\circ$, deci $AO = 2R$, prin urmare $OD = AD = BD = R$, așadar punctul D este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, deci $R_1 = AD = R$.

5. a) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$, deci $AB = BC = 6$ cm. Construim $AE \perp CD$, $E \in CD$, deci $\sphericalangle DAE = 30^\circ$, prin urmare $\frac{CD-AB}{2} = \frac{AD}{2}$, de unde obținem $CD = 12$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 30$ cm; **b)** $\mathcal{A}_{ABCD} = 27\sqrt{3}$ cm².

6. a) $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAF = 30^\circ$, deci $\sphericalangle EAF = 60^\circ$; **b)** $AF = 3\sqrt{3}$ cm, $AE = 4\sqrt{3}$ cm; construim $FG \perp AE$, $G \in AE$, deci $FG = 4,5$ cm, prin urmare $\mathcal{A}_{EAF} = 9\sqrt{3}$ cm².

Testul 3: I. 1. c) 2. c) 3. a) 4. d) 5. b) 6. a). II. 1. b) 2. a) 3. d) 4. d) 5. c) 6. c). III. 1. a) $x = -5\sqrt{3}$, $y = -6\sqrt{2}$; $x < y$; **b)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y}\right) \cdot xy = -27 \in \mathbb{Z}$. **2. a)** 12 mingi de handbal; **b)** 9 mingi

de fotbal. **3. a)** Din $\overline{ab} = 6a + 7b$, rezultă că $2a = 3b$, deci $E = \{32, 64, 96\}$; din $\overline{cd} = 3cd - 2$, rezultă că $c = \frac{d+2}{3d-10}$, de unde, pentru $d = 4$, obținem $c = 3$, iar pentru $d = 6$, obținem $c = 1$,

așadar $F = \{34, 16\}$; $E \times F = \{(32, 34), (32, 16), (64, 34), (64, 16), (96, 34), (96, 16)\}$; **b)** $S_1 = 192$, $S_2 = 50$, $\sqrt{S_1 + S_2} = 11\sqrt{2}$. **4. a)** $\mathcal{A}_{DEF} = 63\sqrt{3}$ cm²; **b)** Construim $DM \perp EF$, $M \in EF$,

deci $DM = 3\sqrt{21}$ cm și, aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle DMG$, obținem $DG = 14$ cm; construim $EN \perp DG$, $N \in DG$, deci $2\mathcal{A}_{DEG} = EN \cdot DG$, de unde rezultă că $EN = 6\sqrt{3}$ cm.

5. a) Construim $AE \perp OB$, $E \in OB$ și $DF \perp OC$, $F \in OC$. $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{COD}$, deci $R \cdot AE = R \cdot DF$, prin urmare $AE = DF$; **b)** $\triangle AOE \equiv \triangle DOF$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOF$, prin urmare $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD =$

$= 180^\circ$. **6. a)** $\sphericalangle BMD = \sphericalangle CIE = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{2}$; **b)** $\triangle AMI \sim \triangle AIN$, deci $\frac{AM}{AI} = \frac{AI}{AN}$, de unde rezultă că $AI^2 = AM \cdot AN$.

Testul 4: I. 1. b) 2. a) 3. c) 4. d) 5. a) 6. b). II. 1. a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. d) 6. c). III. 1. a) $x = \frac{1}{2}$; **b)** $(\sqrt{x^3} - \sqrt{x})^2 = \frac{1}{8}$. **2. a)** 7 microscopae; **b)** 24 de elevi. **3. a)** $x + y = 4$, deci $x = 1$ și $y = 3$,

sau $x = 2$ și $y = 2$, sau $x = 3$ și $y = 1$, deci $A = \{P_1(1, 3), P_2(2, 2), P_3(3, 1)\}$; **b)** Observăm că punctul $P_2(2, 2)$ este mijlocul segmentului P_1P_3 și cum $OP_1 = OP_3$, rezultă că $d(O, P_1P_3) = OP_2 =$

$= 2\sqrt{2}u$. **4. a)** $DO \cap EF = \{M\}$, deci $DM \perp EF$ și obținem $DM = 18$ cm; **b)** Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle OEM$, obținem $R = 10$ cm; $\mathcal{A}_d = 100\pi$ cm². **5. a)** $AC = 25$ cm; **b)** Construim $EF \perp AD$, $F \in AD$, deci $\triangle AFE \sim \triangle ADC$, de unde obținem $EF = 12,8$ cm; $\mathcal{A}_{AED} = 96$ cm².

6. a) $\sphericalangle BEG = \sphericalangle BGE = 67^\circ 30'$, deci $BE = BG$, dar $BE = BF$, prin urmare $BG = BF$, deci $\sphericalangle BFG = = 45^\circ$, așadar $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle AFG$, de unde rezultă că $BD \parallel FG$; **b)** $\triangle ABG \equiv \triangle CBF$, deci $AG \equiv CF$.

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	5
Lecția 2. Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$	8
Lecția 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	14
Lecția 4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	18
Lecția 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	33
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	36
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	38

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide	40
Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale	43
Lecția 8. Distanța dintre două puncte în plan	49
Lecția 9. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	53
Lecția 10. Elemente de statistică matematică. Poligonul frecvențelor	58
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	63
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	66
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	68

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	71
Lecția 2. Teorema lui Thales	74
Lecția 3. Reciproca teoremei lui Thales	82
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	87
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	90
Lecția 4. Triunghiuri asemenea	92
Lecția 5. Teorema fundamentală a asemănării	95
Lecția 6. Criterii de asemănare a triunghiurilor	100
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	105
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	108
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	110

CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIEL DREPTUNGHI

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	114
Lecția 8. Teorema înălțimii	117
Lecția 9. Teorema catetei	121
Lecția 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	126
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	132
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	134
Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	136

Lecția 12. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	143
Lecția 13. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat	148
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	153
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	156
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	158
TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIȚELOR	161
TESTE DE EVALUARE FINALĂ	164
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	189

EDITURA PARALELA 45