Marius Burtea **Georgeta Burtea**

Lenuța Alexa ▪ Eugen Alexandrov ▪ Laura Amariei ▪ Gina Avădanei ▪ Emil Badea ▪ Didina Buculei
Daniela Busuioc ▪ Dumitru Crăcană ▪ Oana Ban ▪ Viorica Brisc ▪ Nicoleta Sofian Boca
Aurora Cojocariu ▪ Mihaela Cojocnean ▪ Emilia Copaciu ▪ Mirela Corjos ▪ Silvia Costin
Cristina Coșerea ▪ Ștefan Cristescu ▪ Felicia Cristescu ▪ Minodora Deac ▪ Marius Dragomir
Adriana Drăgoi ▪ Cristina Monica Epure ▪ Gabriela Mariana Faina ▪ Gavril Sorin Galea
Mihaela Ghelbere ▪ Constanța Gusta ▪ Rodica Habor ▪ Irina Humă ▪ Corneliu Huzum ▪ Letiția Ignat
Magdalena Iorgulescu ▪ Livia Iosif ▪ Mihaela Lazăr ▪ Magdalena Lefter ▪ Mihaela Lucan ▪ Maria Macar
Cristina Magirescu ▪ Elisabeta Mihoc ▪ Liliana Miroș ▪ Niculina Mihaela Moisuc ▪ Cerasela Momoiu
Aluniță Neag ▪ Mihaela Neagu ▪ Gabriela Nut ▪ Carmen Oniciuc ▪ Aura-Loreta Pogorevici
Annamaria Pop ▪ Anca Elena Pop ▪ Doina Florina Popa ▪ Mihaela-Crina Popa ▪ Olga Radu
Vasile Roșca ▪ Anișoara Rotariu ▪ Olimpia State ▪ Ana Mădălina Șerban ▪ Valentin Ștefan
Ileana Șuba ▪ Laurențiu Tătaru ▪ Lenuța Țicală ▪ Marian Ușer

BACALAUREAT 2017

MATEMATICĂ

FILIERA TEHNOLOGICĂ

EXERCIȚII RECAPITULATIVE • TESTE

CAMPION

CUPRINS

Prefaţă 3

TEME RECAPITULATIVE 5

CLASA A IX-A

Cap I. Mulţimi şi elemente de logică matematică 6
Cap II. Funcţii 10
Cap III. Vectori în plan 26
Cap IV. Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie 30

CLASA A X-A

Cap I. Mulţimi de numere 36
Cap II. Funcţii şi ecuaţii 42
Cap III. Probleme de numărare 47
Cap IV. Elemente de statistică şi probabilităţi 50
Cap V. GEOMETRIE 53

CLASA A XI-A

ALGEBRĂ

Cap I. Matrice 58
Cap II. Determinanţi 62
Cap III. Sisteme de ecuaţii liniare 68

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cap I. Limite de funcţii 74
Cap II. Funcţii continue 81
Cap III. Funcţii derivabile 84
Cap III. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor 91

CLASA A XII-A

ALGEBRĂ

Cap I. Grupuri 97
Cap II. Inele şi corpuri 103

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cap I. Primitive 117
Cap II. Integrala definită 120
Cap III. Aplicaţii ale integralei definite 123

Variante de subiecte pentru Bacalaureat 130

Soluţii, indicaţii şi răspunsuri 197

EXERCIŢII RECAPITULATIVE
CLASA A IX-A

I. Mulţimi şi elemente de logică matematică

II. Funcţii

2.1. Şiruri

2.2. Funcţii. Lecturi grafice

2.3. Funcţia de gradul I

2.4. Funcţia de gradul II

III. Vectori în plan

IV. Trigonometrie şi aplicaţii ale trigonometriei în geometrie

I. MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Puteri cu exponent întreg.

- Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$: $a^0 = 1, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Dacă $a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}$, au loc proprietăţile:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0, \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Rădăcina pătrată a numărului pozitiv x este numărul real pozitiv, notat $\sqrt{x}$, al cărui pătrat este egal cu x.

Reguli de calcul. Pentru $a, b \in (0, +\infty)$.

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}, \quad c\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{c^2 a}, c \geq 0 \\ -\sqrt{c^2 a}, c < 0 \end{cases}, \quad \sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ordonarea numerelor reale

- Relaţia "$\leq$" este relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$, adică are proprietăţile:
  a) reflexivitatea $a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$; b) antisimetria: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$;
  c) tranzitivitatea: $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
- Alte proprietăţi ale relaţiei "$\leq$":
  a) $a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + x, \forall\, a, b, x \in \mathbb{R}$; b) $a \leq b$ şi $x \geq 0 \Rightarrow ax \leq bx, a, b \in \mathbb{R}$;
  c) $a \leq b$ şi $x \leq 0 \Rightarrow ax \geq bx, a, b \in \mathbb{R}$; d) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, a, b \in (0, +\infty)$;
  ($m_{\text{arim}} \leq m_{\text{geom}} \leq m_{\text{arit}}$ inegalitatea mediilor).

Modulul unui număr real.

$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ (modulul sau valoarea absolută a lui x).

Proprietăţi:

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; c) $|-x| = |x|, x \in \mathbb{R}$;

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$; e) $|xy| = |x| \cdot |y|$; f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$;

g) $\sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$; h) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$ i) $|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c$ sau $x \geq c$.

Partea întreagă a numărului $x \in \mathbb{R}$ este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x. Se notează $[x]$.

$[x] \in \mathbb{Z}$ şi $[x] \leq x < [x] + 1$; $x - 1 < [x] \leq x$; $[x + n] = [x] + n, n \in \mathbb{Z}$;

Partea fracţionară a numărului $x \in \mathbb{R}$ este numărul, notat $\{x\}$, cu proprietatea că $\{x\} = x - [x]$.

$[x] + \{x\} = x$; $\{x + n\} = \{x\}, n \in \mathbb{Z}$

Tabel de adevăr pentru operaţii cu propoziţii.

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$	$v(p \to q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Metoda inducției matematice.

Fie $m \in \mathbb{N}$ și $P(n)$ o propoziție matematică, $n \in \mathbb{N}, n \geq m$.

"$P(n), \forall n, n \geq m$" este adevărată dacă:

a) $P(m)$ este adevărată;

b) $P(k) \to P(k+1)$ este adevărată.

1. Să se calculeze:

a) $2-2\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3+1\right]:\frac{7}{4}$.

2. Să se calculeze:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}$; b) $\left(\sqrt{5}+1\right)^2-\sqrt{20}$; c) $4^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot 2^5\cdot 8^{-2}$.

3. Să se arate că numărul $a=\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ este număr natural.

4. Să se arate că numărul $b=\left(2-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{11-4\sqrt{6}}$ este număr natural.

5. Știind că $a=\sqrt{64}+\sqrt{36}$ și $b=\sqrt{\frac{49}{100}}-\sqrt{\frac{4}{25}}$, să se calculeze:

a) $a-30\cdot b$; b) $a^2-9\cdot b^{-1}$; c) $\left(\frac{a}{10}-2b\right)^3$.

6. Să se efectueze:

a) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2$;

b) $(a-b)^2+2(a-b)(a+b)+(a+b)^2$.

7. Să se arate că expresia $E=2(3x+1)(1-3x)+(3x-2)^2+(3x+2)^2$ nu depinde de x.

8. Se dau numerele: $a=8-\sqrt{28}$, $b=2\sqrt{7}+8$. Să se calculeze diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

9. Să se ordoneze crescător numerele: $a=-\frac{7}{2}$; $b=2\frac{2}{5}$; $c=2,3$; $d=-\frac{17}{5}$.

10. Să se ordoneze descrescător numerele: $a=2,43$; $b=2,(4)$; $c=2,(43)$; $d=2,4(3)$.

11. Să se compare numerele x și y în cazurile:

a) $x=4,3591$; $y=4,3587$; b) $x=-3,285$; $y=-3,098$;

c) $x=3\sqrt{3}$; $y=2\sqrt{7}$; d) $x=-6\sqrt{2}$; $y=-5\sqrt{3}$.

12. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă cu o eroare de 10^{-3} pentru numerele:

$a = 2,40679;\quad b = -4,12574;\quad c = \frac{4205}{12}.$

13. Să se scrie aproximările zecimale prin adaos cu o eroare de 10^{-1} pentru numerele:

$a = 2,342;\quad b = -\frac{155}{19};\quad c = \frac{491}{3};\quad d = -3,(41).$

14. Să se scrie rotunjirile la a doua şi la a treia zecimală pentru numerele:

$a = 6,18719;\quad b = \frac{307}{6};\quad c = 2,71(6).$

15. Să se scrie truncherile de ordinul 2 pentru numerele:

$a = 3,4125 - 2,1578;\quad b = 2,453 \cdot 5;\quad c = -4,5241 : 2;\quad d = -4,2(53);\quad e = \frac{759}{48}.$

16. Să se scrie aproximările cu două zecimale exacte ale numerelor:

$a = \sqrt{5};\quad b = \sqrt{45};\quad c = 3\pi$ (luând $\pi \approx 3,141592$).

17. Numărul $\frac{4}{11}$ se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită sub forma $0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine zecimala a_{40}.

18. Numărul $\frac{10}{13}$ se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită sub forma $0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine suma $a_{35} + a_{99}$.

19. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

$a = 12,05;\quad b = -12,05;\quad c = \frac{1243}{7};\quad d = \frac{517}{16};\quad e = -\frac{185}{8}.$

20. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

$a = \frac{3,12 - 2,13}{2,5};\quad b = \frac{-3^2 + (-3)^2 + \sqrt{(-7)^2}}{4}.$

21. Să se determine partea întreagă a numerelor

$a = \sqrt{2010};\quad b = -\sqrt{512};\quad c = \sqrt{6\frac{1}{4}} + \sqrt{5\frac{4}{9}} \cdot 0,6 + \frac{4}{5}.$

22. Să se calculeze: a) $\left[\sqrt{7}\right] - 2 \cdot \left[-\sqrt{30}\right] + \frac{5}{3} \cdot \{-1,4\};$ b) $\left[\sqrt{2012}\right] - 16 \cdot \left\{\frac{25}{4}\right\}.$

23. Se consideră numerele $a = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$ şi $b = \frac{45}{7}$. Să se arate că $3 \cdot [a] - 14\{b\} = 0$.

24. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \le 9\}$. Să se determine mulţimea $A \cap \mathbb{N}$.

25. Se consideră mulţimea $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x - 1 \le 4\}$. Să se determine mulţimile:

a) $B \cap \mathbb{Z}$; b) $B \cap \mathbb{N}$.

26. Se consideră mulţimea $A = \left\{-\frac{2}{3};\ \sqrt{\frac{4}{25}};\ 2,(3);\ 0;\ -8;\ \sqrt{12};\ -\sqrt{9}\right\}$. Să se determine mulţimile:

a) $A \cap \mathbb{N}$; b) $A \cap \mathbb{Z}$; c) $A \cap \mathbb{Q}$; d) $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

27. Să se calculeze:

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A X-A

I. Mulţimi de numere

1.1. Mulţimea numerelor reale.

1.2. Mulţimea numerelor complexe.

II. Funcţii şi ecuaţii

III. Probleme de numărare

IV. Elemente de statistică şi probabilităţi

V. Geometrie

I. MULŢIMI DE NUMERE

1.1. Mulţimea numerelor reale.

Radicalul de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Proprietăţi:

În condiţiile de existenţă a radicalilor au loc relaţiile:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; c) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

e) $\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = a^m \sqrt[n]{b}, a \geq 0$; f) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ (amplificare),

g) Compararea radicalilor. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (simplificare);

Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ atunci $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

- **Raţionalizarea numitorilor.**

- **Expresiile conjugate** sunt expresiile al căror produs nu conţine radicali.
- Pentru a raţionaliza o fracţie se amplifică fracţia cu expresia conjugată a numitorului.

a) Numitor de forma $\sqrt[n]{a^k}, a > 0, k < n$. Se amplifică cu $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ şi se obţine $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$.

b) Numitor de forma $\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)$. Se foloseşte formula: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$.

c) Numitori de forma $\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)$ sau $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Se folosesc formulele $\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a \pm b$.

Logaritmul unui număr real pozitiv

- Fie $a > 0, a \neq 1, y > 0$, $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y, a^{\log_a y} = y$.
- Proprietăţi. Operaţii cu logaritmi.

a) $\log_a a^n = n$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$; b) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$;

c) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$; d) $\log_a x^k = k \log_a x$;

e) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Formula de schimbare a bazei logaritmului);

f) $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$.

1. Să se arate că numărul:

a) $\sqrt{1+3+5+...+21}$ este număr natural; b) $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ este număr întreg;

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este număr natural. (*Bacalaureat 2009*)

2. Să se comparare numerele:

a) $a = \sqrt{2}$ şi $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; (*Bacalaureat 2009*) b) $a = \sqrt{3}$ şi $b = \sqrt[3]{5}$.

3. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 64 şi $\sqrt[3]{8}$; (*Bacalaureat 2009*) b) 5; $\sqrt[3]{100}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$.

4. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{9}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; (*Bacalaureat 2009*) b) $\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{9^6}+\sqrt[3]{125}$; c) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{5^4}$.

6. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care expresia $E(n)=\sqrt{10-3n}$ este bine definită. (*Bac 2009*)

7. Să se scrie ca putere cu exponent raţional numărul:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt[3]{4}$; c) $8\sqrt{8}$; d) $\frac{\sqrt[3]{729}}{3}$.

8. Să se scrie cu ajutorul radicalului numerele:

a) $4^{\frac{1}{2}}$; b) $3^{\frac{2}{3}}$; c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $(0,25)^{\frac{3}{2}}$.

9. Să se efectueze: a) $3^{\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}$; b) $256^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}$; c) $\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}}:4^2$.

10. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care este definită expresia:

a) $\sqrt{2x-x^2}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-4}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x+3}}-\sqrt[3]{x-2}$.

11. Să se determine media aritmetică şi media geometrică a numerelor $a=2$, $b=12$, $c=9$.

12. Să se compare numerele:

a) 2^2 şi $\log_2 32$; (*Bacalaureat 2009*) b) $\log_2\frac{1}{16}$ şi $\sqrt[3]{-27}$.

13. Să se arate că:

a) $\log_2 3\in(1,2)$; b) $\log_3 4<2<\sqrt{5}$; c) $\log_2 4+\log_3 9<\sqrt{36}$. (*Bacalaureat 2009*)

14. Să se calculeze:

a) $\log_3 27-\log_2 8$; b) $\log_5 25-\lg 100$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-\log_7 49$; d) $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$. (*Bacalaureat 2010*)

15. Să se calculeze:

a) $\log_6 24-\log_6 4$; b) $2\log_3 4-4\log_3 2$; c) $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$;

d) $\lg 20+\lg 3-\lg 6$; e) $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5$; f) $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}$. (*Bacalaureat 2009*)

16. Să se arate că:

a) $\log_2 14+\log_2 3-\log_2 6=\log_2 7$; (*Bacalaureat 2009*)

b) $\log_5 125+(0,2)^{-1}-\sqrt[3]{125}=\lg 1000$; c) $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$. (*Bacalaureat 2009*)

17. Ştiind că $\log_3 2=a$ să se verifice dacă $\log_3 8+\log_3 100-\log_3 25=5a$. (*Bacalaureat 2009*)

18. Se consideră numărul $a=\log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18=2a+1$. (*Bacalaureat 2009*)

19. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$, unde $a=\log_3 2$. (*Bacalaureat 2009*)

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A XI-A

Partea I. Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare

I. Matrice

II. Determinanţi

III. Sisteme de ecuaţii liniare

Partea II. Elemente de analiză matematică

1. Limite de funcţii

2. Funcţii continue

3. Funcţii derivabile

4. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

Partea I. *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare*

I. MATRICE

- Dacă $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}), A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, atunci $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.
- $O_{m,n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ este **matricea nulă**, de tip (m,n). $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ este **matricea unitate** de ordinul n.

Operaţii cu matrice.

Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

1. Adunarea matricelor.

- **Suma** matricelor A,B este matricea $C=(c_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$,,

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Proprietăţi:

a) $(A+B)+C=A+(B+C), \forall A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{C})$;

b) $O_{m,n}$ este element neutru: $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A$;

c) Matricea $-A=(-a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este opusa matricei A:

$A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}, \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. Înmulţirea matricelor cu scalari

Fie $\alpha\in\mathbb{C}, A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $\alpha A=(\alpha a_{ij})$ se numeşte produsul matricei A cu constanta α.

3. Înmulţirea matricelor

Fie $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B=(b_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

Produsul matricelor A şi B (în această ordine) este matricea $C=(c_{ij})\in M_{m,p}(\mathbb{C})$, unde

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}$.

Proprietăţi

a) $(AB)C=A(BC), \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{n,p}(\mathbb{C}), C\in M_{p,q}(\mathbb{C})$;

b) $A(B+C)=AB+AC, \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B,C\in M_{n,p}(\mathbb{C})$,

$(A+B)C=AC+BC, \forall, A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}), C\in M_{n,p}(\mathbb{C})$;

c) Matricea unitate de ordinul n este element neutru pe mulţimea $M_n(\mathbb{C})$:

$I_n\cdot A=A\cdot I_n=A, \forall A\in M_n(\mathbb{C})$.

4. Transpunerea

Dacă $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, **transpusa matricei** A este matricea $A\in M_{n,m}(\mathbb{C})$, obţinută din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane sau a coloanelor în linii.

Proprietăţi:

a) ${}^t(A\pm B)={}^tA\pm{}^tB$; b) ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$; c) ${}^t({}^tA)=A$.

1. Consumul de apă (exprimat în m^3), măsurat de apometrele a trei scări de bloc pe o perioadă de o lună, este consemnat în următorul tabel matriceal:

Nr. săptămânii / Nr. scării	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
1	50	60	40	70
2	72	45	60	55
3	64	58	60	68

a) Să se interpreteze datele din coloana a II-a.

b) Ce reprezintă numerele 64, 40 şi 55?

c) După modelul $40 = a_{13}$ să se completeze: $50 = ...$; $58 = ...$; $68 = ...$; $72 = ...$.

2. Se dă matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & -4 & -5 \\ -3 & 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze tipul matricei A.

b) Să se determine elementele: a_{23}, a_{31}, a_{34}, a_{12}.

c) Să se calculeze $a_{31} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{33} - (a_{24})^2 + 2a_{32}$.

3. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se precizeze:

a) diagonala principală; b) diagonala secundară; c) $\mathrm{Tr}(A)$; d) ${}^tA$.

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze mulţimea matricelor căreia îi aparţin matricele A şi B.

b) Să se calculeze $\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}({}^tA) - 2 \cdot \mathrm{Tr}({}^tB)$.

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} x & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 4x \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -C_2^1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^y \end{pmatrix} = I_2$; b) $\begin{pmatrix} 4^x - 16 & 0 \\ 0 & \lg y - 1 \end{pmatrix} = O_2$.

7. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ x^2 - 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 2y-x \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{x} & 2 \\ x - \sqrt[3]{y} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ din egalităţile de matrice:

a) $\begin{pmatrix} -3 & b+2 \\ 5c-1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & c \\ 3^2 & a + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a\sqrt{2} - 1 & 1 \\ -1 & b^2 - 3 \\ 0 & C_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} - 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$.

EXERCIȚII RECAPITULATIVE
CLASA A XII-A

Elemente de algebră

I. Grupuri

II. Inele şi corpuri

Elemente analiză matematică

I. Primitive

II. Integrala definită

III. Aplicaţii ale integralei definite

Elemente de algebră
I. GRUPURI

Noțiunea de grup

Fie $G \neq \varnothing$ și o lege de compoziție "$\circ$": $G \times G \to G$.

Perechea $(G, \circ)$ se numește **grup** dacă sunt verificate axiomele.

G1) **Axioma asociativității**: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$.

G2) **Axioma elementului neutru**: $\exists x \in G$, a.î.

$\forall x \in G \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$.

G3) **Axioma elementelor simetrizabile:** $\forall x \in G, \exists x' \in G$, a.î.

$x \circ x' = x' \circ x = e$.

Dacă în plus este verificată și:

G4) **Axioma comutativității**: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in G$, atunci grupul $(G, \circ)$ este grup comutativ (abelian).

Morfisme și izomorfisme de grupuri

Fie $(G_1, \circ), (G_2, *)$ două grupuri.

- Funcția $f : G_1 \to G_2$ este **morfism** (omomorfism) de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$.
- Funcția $f : G_1 \to G_2$ este **izomorfism** de grupuri dacă:
  a) f este morfism de grupuri;
  b) f este funcție bijectivă.
- Dacă $f : G_1 \to G_2$ este izomorfism de grupuri, atunci $f^{-1} : G_2 \to G_1$, este izomorfism de grupuri.
- Fie $(G_1, \cdot), (G_2, \cdot)$ grupuri, e_1, e_2 elementele lor neutre și morfismul $f : G_1 \to G_2$. Atunci:
  a) $f(e_1) = e_2$;
  b) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, x \in G_1$;
  c) $f(x^n) = (f(x))^n, x \in G_1, n \in \mathbb{Z}$
- Dacă $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ sunt morfisme de grupuri, atunci $g \circ f$ este morfism de grupuri.

1. Să se studieze proprietatea de comutativitate a legii de compoziție "$\circ$" pe mulțimea M în cazurile:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = 3x + 3y - xy$; b) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = (x-2)(y-2) + 5$;

c) $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $A(x) \circ A(y) = A(x) \cdot A(y)$.

2. Să se studieze proprietatea de asociativitate pentru legea de compoziție "$\circ$" pe mulțimea M în cazurile: a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$; b) $M = (-4, +\infty)$, $x \circ y = xy + 4(x+y) + 12$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = \sqrt[3]{xy}$; d) $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \circ B = A + B + I_2$.

3. Să se verifice dacă următoarele legi de compoziţie admit element neutru pe mulţimea M şi să se determine mulţimea $U(M)$ a elementelor simetrizabile:

a) $M=\mathbb{R},\ x\circ y=x+y+3xy;$ b) $M=\mathbb{Z},\ x\circ y=x+y-5;$

c) $M=\mathbb{R},\ x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3};$ d) $M=(0,+\infty)\setminus\{1\},\ x\circ y=x^{2\ln y};$

e) $M=\mathbb{Z},\ x\circ y=xy-4(x+y)+20.$

4. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y=2xy-6x-6y+21.$

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$

c) Să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2011}.$

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=(x-2)(y-2)+2.$

a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

b) Să se demonstreze că $x\circ 2=2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

c) Să se calculeze $(-2011)\circ(-2010)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2011.$

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y=(x-4)(y-4)+4.$

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x\circ x=x.$

c) Să se determine două numere $a,\ b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}.$ *(Bacalaureat 2009)*

7. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy+2x+2y+2.$

a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2,\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$

b) Să se determine simetricul elementului $x=-3$ în raport cu legea "$\circ$".

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x^2*y^2=7\\ x^2\circ y^2=16\end{cases},\ x,\ y\in\mathbb{R}.$

8. Pe $\mathbb{R}$ se consideră operaţia $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}.$

a) Să se arate că legea de compoziţie este asociativă.

b) Să se determine elementul neutru.

c) Să se calculeze $(-3)\circ(-2)\circ(-1)\circ\ldots\circ 3.$

9. Se consideră mulţimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\right\}.$

a) Să se verifice că $A(a)\cdot A(b)=A(2ab),\ \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu înmulţirea matricelor pe M.

(Bacalaureat 2009)

10. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3.$

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x\circ x=x*x.$

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ a=3,\ \forall\, x\in\mathbb{Z}.$

Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1=5 \end{cases}$, $x, y\in\mathbb{Z}$. *(Bacalaureat 2009)*

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x^2-5)\circ 6=-1$.

Să se determine două numere $a, b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$. *(Bacalaureat 2009)*

2. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x\circ y=x+y+3$ și $x*y=xy-3(x+y)+12$.

Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x\circ(y-1)=0 \\ (x+1)*y=x*(y+1) \end{cases}$, $x, y\in\mathbb{R}$. *(Bacalaureat 2009)*

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=-xy+2x+2y-2$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x*4=10$.

Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel ca $x*a=a*x=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Știind că legea "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}$.

(Bacalaureat 2009)

4. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-5(x+y)+30$.

Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

Să se calculeze simetricul elementului $2\circ\frac{16}{3}$.

Să se verifice dacă legea de compoziție este asociativă.

5. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=x+y+m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

Să se arate că legea de compoziție este asociativă.

Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(-\sqrt{3})*(-\sqrt{2})*m*(\sqrt{3})=3\sqrt{2}$. *(Bacalaureat 2009)*

6. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-x-y+2$.

Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ.

Să se arate că dacă $x, y\in\mathbb{N}^*$ atunci $x*y\in\mathbb{N}^*$.

Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x*a=a$, $\forall x\in\mathbb{Z}$.

7. Pe mulțimea $M=(0,1)\cup(1,\infty)$ se definește legea de compoziție $x\perp y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$.

Să se arate că $(M,\perp)$ este monoid.

Să se determine simetricul elementului $x=e$, unde e este baza logaritmului natural.

8. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y+k$.

Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

Pentru $k=0$ să se determine elementul neutru al legii.

Să se determine simetricul elementului $\left(-\frac{1}{2}\circ 4\right)$ când $k=0$.

VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU BACALAUREAT

VARIANTA 01

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se arate că $\log_3 \frac{1}{81} + \sqrt{16} + C_{2017}^{2016} = 2017$.

2. Se consideră ecuația $3z + 2i\bar{z} = 5(1+i)$. Să se calculeze $|z|$.

3. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 7$.

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $2n - 8 = \frac{(n+1)!}{n!}$.

5. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât distanța dintre punctele $A(1,m)$ și $B(2,0)$ să fie $\sqrt{3}$.

6. Să se calculeze $E = \sin x + \operatorname{tg} x$, știind că $\cos x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze suma elementelor matricei $B \cdot A$.

b) Să se calculeze inversa matricei $A \cdot B$.

c) Să se determine x real astfel încât soluția ecuației $BX = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ să fie matricea C.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y-1}$.

a) Să se calculeze $2017 \circ (-2017)$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x \circ x^2 = 32$.

c) Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" nu este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

a) Să se calculeze: $f(1) + f'(0) + f''(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la grafic în punctul $A(0,-2)$.

c) Să se determine coordonatele punctului de inflexiune al graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, x < 0 \\ e^x + 2, x \geq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

VARIANTA 02

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se determine numerele complexe z pentru care $|z|=1$ și $\mathrm{Re}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-mx+2, m\in\mathbb{R}^*$. Să se determine numărul real m știind că graficul funcției trece prin punctul $M(-2,4)$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{(x-1)^2-x}=2$.

4. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2-10x+1=0$.

5. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$ a triunghiului ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

6. Să se verifice dacă $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)+\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se calculeze $\det\left(\sqrt{2015}\cdot I_2-A\right)$.

c) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $AX=X+A$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-3$.

a) Să se arate că $1\circ(2\circ 3)=0$.

b) Să se găsească elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$".

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x\circ 4^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:[2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2-4}$.

a) Să se calculeze $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\cdot\sqrt{x^2-4}\,dx$.

b) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției

VARIANTA 61

SUBIECTUL I

1. Se dă progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 4$ şi $r = 3$. Calculaţi a_4.

2. Pentru $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$, să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)$.

3. Să se calculeze $C_{2014}^{2013} - C_{2014}^{1}$.

4. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(5,6)$. Să se calculeze lungimea segmentului $[AB]$.

5. Să se calculeze $\sin^2 30^\circ + \cos^2(150^\circ)$.

6. Să se calculeze $A_{(ABC)}$ ştiind că $AC = 3, BC = 5$ şi $m(\widehat{C}) = 30^0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A-B)$.

b) Să se arate că $A^2 = I_2$.

c) Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze A^{-1}.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + 2013$.

a) Ştiind că legea de compoziţie „$*$" este asociativă, să se calculeze $2*0*(-2)$.

b) Să se verifice că $e = -2013$ este elementul neutru al legii „$*$".

c) Să se rezolve ecuaţia $x^2 * x = 2013$, unde $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+\ln x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Să se arate dacă $f'(x)=\frac{1-2x}{x}$, oricare ar fi $x>0$.

c) Să se arate că f este descrescătoare pe $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+2014$ şi $F(x)=x^2+2014x-3$.

a) Să se verifice că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}$, unde G este o primitivă a funcţiei f.