

PETRE NĂCHILĂ

Analiză matematică

pentru toți

Clasa a XII-a

Editura NOMINA

Capitolul 1

PRIMITIVE

1.1. Noțiunea de primitivă.

Operații cu funcții care admit primitive

Definiția 1. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că funcția f admite primitive pe I dacă există $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe I și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Funcția F se numește *primitivă* lui f (sau antiderivata) pe intervalul I (funcția f se numește *primitivabilă*).

Procedeeul (operația) prin care se determină primitivele unei funcții se numește *integrare* (sau antiderivare).

Teorema 1. Dacă $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval), atunci ele diferă printr-o constantă (adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall x \in I$).

Notății: $\mathcal{F}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}\}$; $\mathcal{C} = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ constantă}\}$.

Pe $\mathcal{F}(I)$ se introduc operațiile de „adunare a funcțiilor” și „înmulțire cu scalari” astfel: fie $f, g \in \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $f + g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$;
- $\alpha f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in I$.

Observații: 1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(I)$;

2. dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(I)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$;

$\alpha\mathcal{F} = \{\alpha f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}\}$;

3. $\alpha\mathcal{C} = \mathcal{C}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$;

4. $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Definiția 2. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe intervalul I se numește *integrala nedefinită* a lui f și se notează $\int f(x)dx$. Dacă F este o primitivă a lui f , avem:

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}.$$

Observație. Definiția primitivei unei funcții poate fi extinsă pe reuniuni finite de intervale distincte. În acest caz, două primitive nu diferă printr-o constantă.

Exemplu. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Luăm primitivele:

$$F_1(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 4, & x > 2 \end{cases}; F_2(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 1, & x > 2 \end{cases}. \text{ Avem } (F_1 - F_2)(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}.$$

$$e) \int \sqrt[3]{3x+1} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$f) \int \frac{1}{\sqrt[5]{3x-3}} dx, x \in (1, \infty);$$

$$g) \int \sqrt[5]{4x^2+4x+1} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$h) \int \frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}} dx, x \in (0, \infty);$$

$$i) \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$j) \int \frac{1}{x^4-5x^2+4} dx, x \in (2, \infty).$$

Soluție. a) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{ctg}^2 x dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + \mathcal{C};$

b) $\int \frac{4\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int 4 dx + 2 \int \operatorname{tg}^2 x dx = 4x + 2 \operatorname{tg} x + \mathcal{C};$

c) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathcal{C};$

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + \mathcal{C};$

e) $\int (3x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{(3x+1)^{\frac{1}{3}+1}}{3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot (3x+1)^{\frac{4}{3}};$ f) $\int (3x-3)^{\frac{2}{5}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-3)^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{3}{5}} =$

$= 5(3x-3)^{\frac{3}{5}};$ g) $\int (2x+1)^{\frac{2}{5}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{14} (2x+1)^{\frac{7}{5}};$ h) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx =$

$= \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \frac{2}{3} \left((\sqrt{x+1})^3 - (\sqrt{x})^3 \right).$

Probleme propuse

A. Determinați următoarele integrale nedefinite:

1. $\int \left(2x^4 - 4x^3 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx, x > 0;$

2. $\int (6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}) dx, x < 0;$

3. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2} \sqrt{x^3} \right) dx, x > 0;$

4. $\int (4e^{4x} - 2e^{-2x}) dx, x \in \mathbb{R};$

5. $\int (6\operatorname{ctg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{6} \right);$

6. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 4x} - \frac{4}{\sin^2 2x} \right) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{8} \right);$

7. $\int \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2}{3x+6} \right) dx, x \in (1, \infty);$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-4} dx, x > 2;$

9. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx, x \in \mathbb{R};$

10. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right);$

Calculul primitivelor unei funcții f definite pe subintervale

Considerăm $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ care admite primitive pe intervalul I . Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset I$, cu $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Considerăm intervalele $I_1 = I \cap (-\infty, a_1]$, $I_2 = (a_1, a_2)$, \dots , $I_n = (a_{n-1}, a_n]$, $I_{n+1} = (a_n, \infty) \cap I$. Funcția f admite primitiva $F_k(x) = F(x) + \mathcal{C}_k$, unde F este primitiva lui f pe I . În orice punct $a \in A$ avem $F(a) = F(a - 0) = F(a + 0)$. Dacă a este extremitatea „stângă” a lui I , avem $F(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} F(x)$. Dacă a este extremitatea „dreaptă” a lui I , avem $F(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} F(x)$.

Probleme rezolvate

1. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x + a)f(x)$, $h(x) = xf(x + a)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Demonstrați că, dacă g și h admit primitive pe \mathbb{R} , atunci f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Determinați o primitivă a lui f cu ajutorul primitivelor lui g și h .

Soluție: a) Fie G, H primitive pe \mathbb{R} ale lui g , respectiv h . Avem $g(x + a) - h(x) = (x + 2a) \cdot f(x + a) - xf(x + a) = 2af(x + a)$ și deci $f(x) = \frac{1}{2a}(g(x) - h(x - a))$. O primitivă a funcției $x \rightarrow h(x - a)$ este $H(x - a)$. Deci, o primitivă a lui f este $F(x) = \frac{1}{2a}(G(x) - H(x - a))$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & x \leq 0 \\ ax + 1, & x \in (0, 1] \\ bx - 2, & x > 1 \end{cases}$ să admită primitive pe \mathbb{R} .

Soluție: O primitivă a lui f pe \mathbb{R} are forma $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + c_1, & x \leq 0 \\ \frac{ax^2}{2} + x + c_2, & x \in (0, 1] \\ \frac{bx^2}{2} - 2x + c_3, & x > 1 \end{cases}$. Din condiții-

ile $F(0) = F(0 - 0) = F(0 + 0)$; $F(1 - 0) = F(1) = F(1 + 0)$ obținem $c_1 = c_2$, $\frac{a}{2} + 1 + c_2 = \frac{b}{2} - 2 + c_3$. Deoarece F este derivabilă în 0 și 1, avem $F'_s(0) = F'_d(0)$; $F'_s(1) = F'_d(1)$, adică $\lim_{x \nearrow 0} (3x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \searrow 0} (ax + 1)$; $\lim_{x \nearrow 1} (ax + 1) = \lim_{x \searrow 1} (bx - 2) \Leftrightarrow b = a + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

1.4. Integrarea prin părți

Teoremă. Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile cu derivatele funcții continue pe intervalul I , atunci funcțiile $fg, f'g$ și fg' admite primitive pe I și avem:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Probleme rezolvate

1. Determinați următoarele integrale definite:

a) $\int (\sin x) \ln(\cos x) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

b) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx, x > 1;$

c) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, x \in (-a, a), a > 0;$

d) $\int \sqrt{x^2 + a} dx, I$ interval, cu $x^2 + a > 0$.

Soluție. a) $\int (\sin x) \ln(\cos x) dx = \int (-\cos x)' \ln(\cos x) dx = (-\cos x)' \ln(\cos x) +$

$$+ \int (\cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = (-\cos x) \ln(\cos x) - \int \sin x dx = (-\cos x) \ln(\cos x) + \cos x + \mathcal{C};$$

b) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int (\ln(\ln x)) \cdot (\ln x)' dx = (\ln x) \ln(\ln x) - \int (\ln x) \frac{1}{x \ln x} dx = (\ln x) \ln(\ln x) -$

$$- \ln x + \mathcal{C};$$
 c) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$ Cum

$$J = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\int x \cdot (\sqrt{a^2 - x^2})' dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I, \text{ iar } \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a},$$

rezultă că $I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + \mathcal{C};$ d) $I = \int \sqrt{x^2 + a} dx = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx. \text{ Avem } J = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int (x\sqrt{x^2 + a})' dx - I \text{ și}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + \mathcal{C}. \text{ Obținem } I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| \right) + \mathcal{C}.$$

Observație: Avem următoarele funcții hiperbolice: $\text{sh}, \text{ch}, \text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{cth} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R},$

$$\text{definite astfel: } \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{cth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

2. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \arctg x;$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x \arctg x}{(x^2 + 1)^2};$

c) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}};$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4};$

Cuprins

	Enunțuri	Soluții
Capitolul 1. PRIMITIVE		
1.1. Noțiunea de primitivă. Operații cu funcții care admit primitive.....	3	167
1.2. Funcții care admit primitive.....	10	169
1.3. Funcții care nu admit primitive.....	17	170
1.4. Integrarea prin părți	23	172
1.5. Metoda schimbării de variabilă	27	174
1.6. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple.....	36	175
1.7. Integrarea funcțiilor raționale simple.....	43	177
1.8. Integrarea funcțiilor raționale	47	178
1.9. Integrarea prin recurență.....	54	179
1.10. Integrarea anumitor tipuri de funcții.....	60	180
1.11. Integrarea funcțiilor trigonometrice.....	65	181
1.12. Integrarea funcțiilor iraționale	74	183
1.13. Probleme pentru concursuri.....	81	185
1.14. TESTE DE EVALUARE	84	193
 Capitolul 2. INTEGRALA DEFINITĂ		
2.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală. Diviziuni. Sume Riemann. Funcții integrabile	90	197
2.2. Proprietăți ale integralei definite	98	201
2.3. Aditivitatea integralei. Teorema de medie. Integrarea funcțiilor mărginite.....	102	202
2.4. Integrarea prin părți a integralelor definite	110	205
2.5. Schimbarea de variabilă pentru integrale definite	116	207
2.6. Calculul unor limite cu integrale. Șiruri de integrale definite	126	209
2.7. Probleme de sinteză. Probleme recapitulative	131	213
2.8. TESTE DE EVALUARE	142	221

Capitolul 3. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

3.1. Calculul limitelor de șiruri folosind integrala definită.....	145	224
3.2. Aria unei suprafețe plane	150	225
3.3. Volumul unui corp de rotație.....	155	225
3.4. Probleme de sinteză.....	160	226
3.5. TESTE DE EVALUARE	166	