

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

MATEMATICĂ

clasa a IX-a

- ALGEBRĂ
- GEOMETRIE
- TRIGONOMETRIE

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă



CUPRINS

ALGEBRĂ

E * R **

Capitolul I. NUMERE REALE

1. Numere raționale	
Breviar de teorie	7
Probleme propuse	10
	380
2. Numere iraționale. Numere reale	
Breviar de teorie	13
Probleme propuse	15
	381
3. Operații cu numere reale. Formule de calcul prescurtat	
Breviar de teorie	18
Probleme propuse	20
	382
4. Ordonarea numerelor reale. Aproximări zecimale. Trunchieri. Rotunjiri	
Breviar de teorie	26
Probleme propuse	28
	384
5. Modulul unui număr real	
Breviar de teorie	31
Probleme propuse	33
	385
6. Intervale de numere reale	
Breviar de teorie	36
Probleme propuse	37
	387
7. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	
Breviar de teorie	40
Probleme propuse	46
	388
8. Inegalități și identități algebrice	
Breviar de teorie	49
Probleme propuse	51
	390
<i>Teste de evaluare</i>	55
	393

Capitolul II. MULTIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Propoziții. Predicte. Operații logice cu propoziții și cu predicte	
Breviar de teorie	59
Probleme propuse	61
	394
2. Multimi. Operații cu multimi	
Breviar de teorie	65
Probleme propuse	75
	394
3. Condiții necesare. Condiții suficiente. Metoda reducerii la absurd	
Breviar de teorie	78
Probleme propuse	82
	396
4. Metoda inducției matematice	
Breviar de teorie	85
Probleme propuse	92
	397

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

5. Probleme de numărare		E
Breviar de teorie	97	R
Probleme propuse	105	399
<i>Teste de evaluare</i>	107	399

Capitolul III. FUNCȚII

1. Funcții. Funcții numerice. Graficul unei funcții		E
Breviar de teorie	109	R
Probleme propuse	117	400
2. Operații cu funcții. Componerea funcțiilor		E
Breviar de teorie	123	R
Probleme propuse	126	401
3. Funcții monotone. Funcții mărginite		E
Breviar de teorie	129	R
Probleme propuse	132	404
4. Funcții pare. Funcții impare. Funcții fără paritate. Funcții periodice		E
Breviar de teorie	135	R
Probleme propuse	137	405
<i>Teste de evaluare</i>	140	407

Capitolul IV. PROGRESII

1. Siruri de numere reale		E
Breviar de teorie	142	R
Probleme propuse	146	407
2. Progresii aritmetice		E
Breviar de teorie	151	R
Probleme propuse	155	410
3. Progresii geometrice		E
Breviar de teorie	159	R
Probleme propuse	161	412
<i>Teste de evaluare</i>	166	415

Capitolul V. FUNCȚIA DE GRADUL ÎNTÂI

1. Ecuată de gradul întâi		E
Breviar de teorie	168	R
Probleme propuse	169	416
2. Funcția de gradul întâi. Reprezentarea grafică		E
Breviar de teorie	173	R
Probleme propuse	175	418
3. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul întâi.		E
Monotonia și semnul funcției de gradul întâi		R
Breviar de teorie	178	
Probleme propuse	180	420
<i>Teste de evaluare</i>	185	422

Capitolul VI. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

1. Ecuată de gradul al doilea. Descompunerea trinomului de gradul al doilea		E
Breviar de teorie	187	R
Probleme propuse	190	423

2. Relațiile lui François Viète	
Pozitiiile rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea față de un număr real dat.	
Pozitiiile rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea față de două numere reale date	
Breviar de teorie	194
Probleme propuse	202 425
3. Reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea.	
Minimul sau maximul funcției de gradul al doilea	
Breviar de teorie	207
Probleme propuse	211 428
4. Monotonia funcției de gradul al doilea	
Breviar de teorie	215
Probleme propuse	216 430
5. Semnul funcției de gradul al doilea. Inecuații de gradul al doilea.	
Valorile de extrem ale unei expresii raționale.	
Imaginea și preimaginea unei funcții.	
Discuția privind natura și semnul rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea în funcție de valorile unui parametru real	
Breviar de teorie	219
Probleme propuse	230 431
6. Sisteme de ecuații.	
Pozitiiile relative ale unei drepte față de o parabolă.	
Pozitiiile relative a două parabole.	
Discuția rădăcinilor unei ecuații în funcție de pozitiiile relative ale unei drepte variabile	
Breviar de teorie	234
Probleme propuse	242 437
<i>Teste de evaluare</i>	246 441

GEOMETRIE ÎN PLAN

Capitolul I. VECTORI ÎN PLAN

1. Definiția vectorilor. Operații cu vectori	
Breviar de teorie	251
Probleme propuse	256 448
2. Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după două direcții date	
Breviar de teorie	261
Probleme propuse	263 450
3. Vectori într-un reper cartezian	
Exprimarea analitică a unui vector într-un reper cartezian.	
Operații cu vectori într-un reper cartezian.	
Coliniaritatea a doi vectori exprimată analitic	
Breviar de teorie	266
Probleme propuse	269 451
4. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment într-un reper cartezian	
Breviar de teorie	272
Probleme propuse	274 452
5. Vectori de poziție. Coliniaritate. Paralelism. Concurență. Mijlocul unui segment.	
Centre de greutate. Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva. Reciproc	
Breviar de teorie	277
Probleme propuse	291 455
<i>Teste de evaluare</i>	296 460

TRIGONOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

1.	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	
Breviar de teorie	299	
Probleme propuse	300 461
2. Măsurarea unghiurilor. Măsurarea arcelor.		
Definiția cercului trigonometric		
Breviar de teorie	303	
Probleme propuse	307 463
3. Definirea funcțiilor trigonometrice		
Breviar de teorie	310	
Probleme propuse	314 464
4. Teorema fundamentală a trigonometriei. Reducerea la primul cadran		
Breviar de teorie	318	
Probleme propuse	322 467
5. Funcțiile trigonometrice ale sumei sau ale diferenței de unghiuri		
Breviar de teorie	327	
Probleme propuse	328 471
6. Funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu.		
Funcțiile trigonometrice ale unghiului pe jumătate		
Breviar de teorie	331	
Probleme propuse	334 473
7. Formule pentru transformarea sumelor în produse.		
Formule pentru transformarea produselor în sume		
Breviar de teorie	337	
Probleme propuse	340 477
8. Calculul de sume și de produse trigonometrice.		
Identități trigonometrice. Identități trigonometrice condiționate.		
Inegalități trigonometrice		
Breviar de teorie	344	
Probleme propuse	349 479
<i>Teste de evaluare</i>	353 482

Capitolul II. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA ÎN PLAN

1.	Produsul scalar a doi vectori	
Breviar de teorie	357	
Probleme propuse	361 485
2. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Teorema tangentelor.		
Rezolvarea triunghiurilor		
Breviar de teorie	365	
Probleme propuse	368 487
3. Formule pentru aria, raza cercului inscris, raza cercului circumscris și razele cercurilor exinscrise unui triunghi.		
Identități și inegalități într-un triunghi		
Breviar de teorie	372	
Probleme propuse	374 490
<i>Teste de evaluare</i>	378 497
Bibliografie selectivă		498

ALGEBRĂ

I

Numere reale

1. Numere raționale

Breviar de teorie

Reamintim mai întâi notațiile uzuale pentru următoarele mulțimi de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ - mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ - mulțimea numerelor raționale.

- Au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Cu numerele raționale se pot efectua operații algebrice (adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri).

- Un număr rațional care nu este întreg poate fi reprezentat ca *fracție zecimală finită* sau *fracție zecimală periodică*.

Prin procedeul cunoscut al împărțirii obținem reprezentarea sub formă de fracție zecimală a unui număr rațional. Se împarte numărătorul la numitor.

Exemplu: $\frac{55}{32} = 1,71875$; $\frac{17}{40} = 0,425$; $\frac{8531}{20} = 426,55$; $\frac{121}{150} = 0,80666\dots$;

$\frac{437}{222} = 1,9684684\dots$

Reprezentarea zecimală a unui număr rațional este frecvent folosită în probleme de natură practică.

- O *fracție zecimală infinită* o scriem sub formă $a_0.a_1a_2a_3a_4\dots$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$ și cifrele $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Fracția zecimală

infinită se numește *periodică*, dacă există numerele naturale nenule k și p , astfel încât $a_{n+p} = a_n$, oricare ar fi indicele $n \geq k$.

Exemplu: 1) $8,7777\dots = 8,(7)$, unde $a_0 = 8$, $k = 1$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 7$;

2) $0,454545\dots = 0,(45)$, unde $a_0 = 0$, $k = 1$ și $p = 2$;

3) $3,148148148\dots = 3,(148)$, unde $a_0 = 3$, $k = 1$ și $p = 3$;

4) $41,12387777\dots = 41,1238(7)$, unde $a_0 = 41$, $k = 5$ și $p = 1$;

5) $0,56323232\dots = 0,56(32)$, unde $a_0 = 0$, $k = 3$ și $p = 2$.

- Determinarea numărului rațional $\frac{p}{q}$, atunci când se cunoaște reprezentarea lui ca fractie infinită zecimală periodică, care are perioada diferită de 9:
i) cazul $a_0 \in \mathbb{N}$, $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, spunem că fractia zecimală este

$$\text{periodică simplă: } a_0, (a_1 a_2 \dots a_p) = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}}}.$$

Observăm că numărătorul este format din succesiunea de p cifre (care constituie perioada). Numitorul este format numai cu cifra 9 și conține exact p cifre (câte cifre are numărătorul).

$$\text{Exemplu: } 0,(5) = \frac{5}{9}, \quad 0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \quad 0,(324) = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}.$$

Observație.

Dacă $a_0 < 0$, de exemplu, $r = -5,737373\dots$, atunci putem scrie

$$r = -(5 + 0,7373\dots) = -5 - 1 + 1 - 0,7373\dots = -6 + [1 - 0,(73)] =$$

$$= -6 + 0,(26) = -6 + \frac{26}{99}.$$

ii) cazul $a_0 \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; spunem că fractia zecimală este

$$\text{periodică mixtă: } r = a_0, b_1 b_2 \dots b_m (a_1 a_2 \dots a_p) = a_0 + \frac{b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 \dots a_p - b_1 b_2 \dots b_m}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{00 \dots 0}_{m \text{ cifre}}}.$$

Observăm că la numărător avem diferența dintre întregul număr format la dreapta virgulei și numărul constituit din partea neperiodică. Numitorul este format cu cifra 9, repetată de p ori (câte cifre are perioada) urmată de 0, repetată de m ori (câte cifre are partea neperiodică).

$$\text{Exemplu: } 1) \quad 0,35(7) = \frac{357 - 35}{900} = \frac{322}{900} = \frac{161}{450};$$

$$2) \quad 4,213(85) = 4 + \frac{21385 - 213}{99000} = 4 + \frac{21172}{99000};$$

$$3) -7\frac{2}{3} = -7,666\dots = -8 + 0,333\dots = -8 + \frac{1}{3} = \bar{8},333\dots;$$

$$4) -3,51(23) = -4 + [1 - 0,51(23)] = -4 + 0,48(76) = -4 + \frac{4828}{9900}.$$

Observație. Dacă este dată o fracție zecimală infinită cu perioada 9, acesteia îi corespunde un număr rațional $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$. Aplicând algoritmul împărțirii, acestui număr $\frac{m}{n}$ nu-i mai corespunde fracția zecimală dată, ci o fracție care se obține din aceasta prin mărirea cu o unitate a numărului din fața primei cifre a perioadei și înlăturarea următoarelor cifre. Putem spune că nu există fracții zecimale cu perioada (9).

Exemplu: $0,7(9) = 0,8(0) = 0,8; 0,65(9) = 0,66(0) = 0,66; 0,(9) = 1,(0) = 1$.

Probleme rezolvate

1. Scrieți numărul $\frac{1}{7}$ ca număr zecimal periodic.

Rezolvare. Aplicăm algoritmul de împărțire. Astfel $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

2. Se dau numerele reale (fracții zecimale periodice simple):

$$a = 1,(45); \quad b = 2,(31); \quad c = 3,(23).$$

Să se calculeze $a + b + c$.

Rezolvare. Avem: $a+b+c = 1\frac{45}{99} + 2\frac{31}{99} + 3\frac{23}{99} = 6 + \frac{45+31+23}{99} = 6+1=7$.

3. Numărul $a = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{3}{8}} + 1$, este rațional?

Rezolvare.

$$\text{Avem: } a = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{3}{8}} + 1 = \sqrt{\frac{9-24+64}{64}} = \sqrt{\frac{49}{64}} = \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}. \text{ Rezultă că } a = \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}.$$

4. Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere raționale (x, y) care sunt soluții ale ecuației: $x^2 + y^2 = x + y$.

Rezolvare. Fie $y = mx$, $m \in \mathbb{Q}^*$. Ecuația devine:

$$x^2 + m^2 x^2 = x + mx \Rightarrow (1+m^2)x^2 = (1+m)x.$$

Obținem soluția banală $x = 0, y = 0$, cât și soluția $x = \frac{m+1}{m^2+1}$, $y = \frac{m(m+1)}{m^2+1}$.

5. Demonstrați că există o infinitate de numere $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{x^2 + x + 1}$ este rațional.

Rezolvare: Fie egalitatea $\sqrt{x^2 + x + 1} = tx + 1$.

Ridicăm la pătrat: $x^2 + x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1$. Obținem: $x^2(1 - t^2) = x(2t - 1)$.

Rezultă $x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}$, unde $t \in \mathbb{Q} \setminus \{\pm 1\}$.

Se observă că pentru $t = 0,5$, avem $x = 0$, de aceea nu am evidențiat această soluție a ecuației de gradul al doilea în x .

6. Demonstrați că $0,(47) = 1 - 0,(52)$.

Rezolvare. $0,(47) + 0,(52) = \frac{47}{99} + \frac{52}{99} = \frac{99}{99} = 1$; $0,(99) = 0,(9) = 1,(0) = 1$.

Probleme propuse

1. Stabiliți care dintre următoarele fracții sunt reductibile și care dintre ele sunt ireductibile:

a) $\frac{3}{5}$; b) $-\frac{3}{9}$; c) $\frac{35}{63}$; d) $\frac{34}{63}$;

e) $\frac{77}{121}$; f) $-\frac{99}{343}$; g) $-\frac{101}{1001}$; h) $\frac{55}{1001}$.

2. Simplificați următoarele fracții până obțineți fracții ireductibile:

a) $\frac{6}{15}$; b) $-\frac{24}{40}$; c) $-\frac{21}{49}$; d) $\frac{125}{1000}$;

e) $\frac{111}{370}$; f) $-\frac{1575}{735}$; g) $-\frac{350}{980}$; h) $\frac{4100}{1681}$.

3. Fie fracția $\frac{3n+1}{2n+5}$. Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$, pentru care:

a) fracția este subunitară; b) fracția este supraunitară;

c) fracția este echivalentă cu $\frac{4}{3}$.

4. Scrieți numărul 10 sub formă de:

a) produs de două numere naturale;

b) produs a două numere întregi care nu sunt naturale;

c) produs a două numere raționale care nu sunt numere întregi;

d) produs dintre un număr întreg și un număr rațional care nu este număr întreg.

5. Descompuneți numărul 12 în sumă de două numere:
a) naturale;
b) întregi de semne opuse;
c) raționale pozitive dar care nu sunt numere naturale;
d) raționale de semne opuse dar care nu sunt numere întregi.
6. Determinați valorile numărului $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât numărul $\frac{10}{k+2}$ să fie:
a) natural; b) întreg; c) fracție ireductibilă.
7. Scrieți sub formă de *fracții zecimale finite* numerele:
a) $\frac{13}{10}$; b) $-\frac{27}{100}$; c) $\frac{3453}{1000}$; d) $-\frac{2975}{100}$;
e) $\frac{5}{2}$; f) $-\frac{23}{4}$; g) $\frac{8}{125}$; h) $-\frac{351}{25}$.
8. Scrieți sub formă de *fracții zecimale periodice simple* următoarele numere:
a) $\frac{7}{3}$; b) $-\frac{10}{9}$; c) $\frac{100}{6}$; d) $-\frac{160}{14}$;
e) $\frac{229}{99}$; f) $-\frac{23}{99}$; g) $\frac{1115}{999}$; h) $-\frac{237}{999}$.
9. Scrieți sub formă de *fracții zecimale periodice mixte* următoarele numere:
a) $\frac{7}{6}$; b) $-\frac{43}{12}$; c) $\frac{31}{14}$; d) $-\frac{121}{900}$;
e) $\frac{65}{18}$; f) $-\frac{31}{24}$; g) $\frac{501}{22}$; h) $-\frac{61}{495}$.
10. Scrieți ca fracții ordinare numerele:
a) 2,3; b) -3,17; c) 0,125; d) -250,7;
e) 0,25; f) -11,5; g) 31,31; h) -2,1237.
11. Scrieți ca fracții ordinare numerele:
a) 0,(3); b) -0,(5); c) 2,(7); d) -3,(12);
e) 2,(13); f) -0,(18); g) 0,(135); h) -1,(1103).
12. Scrieți ca fracții ordinare numerele:
a) 1,2(5); b) -0,2(3); c) 12,4(04); d) -1,2(31);
e) 0,23(1); f) -2,3(01); g) 0,23(14); h) 1,23(145).